Auguste Van den Borre

# La mathématique en français

Contez d'abord, comptez ensuite.

A mes très nombreux petits coauteurs anonymes

ET

Et avec toute ma gratitude à MONSIEUR REMY KIYEDI,

excellent informaticien, qui a permis de moderniser l'édition 2000.

**INTRODUCTION**

## AVERTISSEMENT RASSURANT

La Mathématique en Français... ! ?
**Rassurez-vous**, au fil des pages, ce titre à la fois évocateur et intrigant, prendra tout son sens à vos yeux… ou plus exactement à vos oreilles !

**Rassurez-Vous**, cet ouvrage n'a rien de théorique. Il est le fruit d'une pratique au quotidien, longue de trente-cinq années, une carrière d'instituteur. D'année en année, cette pratique s'est peaufinée au contact des réactions d'enfants et de groupes d'enseignants.

**Rassurez-vous,** ce livre ne vous apprendra sans doute rien que vous ne sachiez déjà.
Tout ce qu'il prétend vous rappeler est fait de choses très simples, très évidentes... mais trop enfouies au fond de chacun.

**Ce livre voudrait :**

- Susciter chez le lecteur un « changement émergent » c'est-à-dire un changement prenant racine dans le déjà-là, bâti sur le déjà-là.
- Vous aider à ressusciter des évidences oubliées, oubliées parce que trop proches dans l'environnement, trop quotidiennes, trop voyantes !

J’avais oublié que les roses sont roses.
J’avais oublié que les bleuets sont bleus.
J'avais oublié tant de belles choses.
J’avais oublié... où avais-je les yeux ?
Adamo

- Prôner la découverte des notions mathématiques au départ de notre environnement, à partir de la vie quotidienne. Mais attention ! Pour ce faire, il vous sera demandé de vous alléger¸ « d'oublier » ce que vous avez appris, de jeter du lest, de faire le vide, de vous rajeunir, de vous glisser dans la peau d'un enfant curieux et ouvert qui essaye de comprendre le monde dans lequel il vit.

Pour commencer cette cure de rajeunissement, il vous sera d'abord imposé un mauvais quart d'heure, un seul !

Dix minutes de sentiments refoulés : stress, angoisse, indifférence, indignation, révolte, refus.

Calcul mental

| | |
|---|---|
| 1) 0,6 x 0,45 = | 11) 0,6 : 0,12 = |
| 2) 19,8 x 7,5 = | 12) 12 : 0,15 = |
| 3) 0,625 x 0,4 = | 13) 0,5 : 1,5 = |
| 4) 9,375 x 5,6 = | 14) 16,5 : 0,375 = |
| 5) 2,75 x 1,2 = | 15) 138 : 0,08 = |
| 6) 2/3 x 1,5 = | 16) 210 : 1,05 = |
| 7) 2/5 x 20/37 = | 1 7) 27 : 0,45 = |
| 8) 2/3 x 6 9/17 = | 18)34 :0 ,085 = |
| 9) 3 1/2X6 2/5 = | 19) 0,15 : 0,6 = |
| 10) 3 1/4X4 12/39 = | 20) 6/13 : 1 5/13 = |

Vous avez sûrement hâte de connaître vos résultats. Les voici :

| | |
|---|---|
| 1) 0,27 | 11) 5 |
| 2) 148,5 | 12) 80 |
| 3) 0,25 | 13) 1/3 ou 0,33 |
| 4) 52,5 | 14) 44 |

| | |
|---|---|
| 5) 3,3 | 15) 1725 |
| 6) 1 | 16) 200 |
| 7) 8/37 | 17) 60 |
| 8) 4 6/17 | 18) 400 |
| 9) 21 7/5 ou 22 2/5 | 19) 1 /4 ou 0,25 |
| 10) 14 | 20) 1/3 |

**« …des colonnes de calculs barbares qui n'ont ni queue ni tête car ils ne viennent de nulle part et ne vont nulle part. »**

## RÉFLEXIONS, MÉDITATIONS, CITATIONS

### Un regret

La cause réelle de votre échec éventuel ne fait aucun doute.
Vous avez été confronté à des opérations toutes « nues » sans aucune signification. Bien souvent, les opérations sont abordées trop rapidement de façon abstraites et, par ce fait, perçues comme des « objets » mystérieux.

Pourtant, le Plan d'Études de 1936 attirait déjà l'attention sur le fait que

« …l'enfant ne comprend pas l'activité sans but… »

En 1995, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) souligne :

« Nous venons pour l'essentiel d'une tradition qui consistait à enseigner la science toute construite. »

*(La Mathématique de la maternelle jusqu'à* 18 *ans, 1995)*

Docilement mais passivement, étant enfant, nous avons pris « l'habitude » de recevoir et de mémoriser des formules savantes sans chercher à comprendre ce qu'elles signifient concrètement. Or…

Voici ce que déclare Marco Wolfs : « Comprendre les maths, c'est avant tout comprendre leur lien avec l'univers qui nous entoure (...) Pourtant jamais elles n'ont été enseignées de façon aussi abstraite, comme une discipline désincarnée et sans lien avec le monde réel. »2
Marco Wolfs surenchérit sévèrement : « Les profs, en gros, ont appris les maths comme ils les enseignent et ils les enseignent comme ils les ont apprises ». (...)

« Ce qui est abominable, c'est que l'on s'acharne à écraser les enfants, à les faire se sentir impuissants, à leur présenter les mathématiques comme une discipline difficile, effroyablement difficile... et à leur donner des complexes... »

« La moitié des difficultés des élèves viennent du cinéma[3] qu'ils s'en font... ou qu'on leur en a fait. Elles viennent de l'état d'esprit avec lequel ils les abordent, d'une sorte de complexe, de crainte superstitieuse, d'un manque de confiance en soi qui leur a fait perdre les qualités de raisonnement dont ils savent faire preuve dans la vie courante.(note 4)

**Un espoir**

Cet espoir est identique à celui du CREM qui demande aux enseignants de «ne plus enseigner comme le faisaient leurs maîtres » sachant cependant qu'un changement demande du temps, du labeur et de la volonté, de l'humilité et du courage.

L'enjeu n'en vaut-il pas la peine ? Quelques réponses :

« Tout passé a d'abord été de l'avenir... La qualité du prochain passé de nos enfants dépend de la richesse de l'avenir que nous envisageons avec eux, pour eux, aujourd'hui. » (J.-M. Dumont, inspecteur).5,

« Les changements ne doivent pas nous effrayer ; ils doivent nous inspirer. » J. Welsch. Osons le changement sans nous culpabiliser, sans démolir notre « maison » vieille de ... ans. Edith Piaf chante : « Non, rien de rien, non je ne regrette rien ». Cependant elle termine ainsi : « Je répars à zéro. »

**Une foi grandissante**

Cette foi est proche de celle de NICOLAS ROUCHE qui affirme : « ... ne suffit-il pas d'avoir vu un élève, une seule fois, se mettre à penser et à agir sur un chantier de problèmes à sa portée pour savoir que la Pensée mathématique est latente dans son esprit ? » 6

"Les mathématiques n'ont rien d'une discipline à part.… Elles sont pour ainsi dire une face de la pensée... »

Et Bachelard de conclure : " La mathématique Est une pensée, une pensée sûre de son langage. »

Nous croyons sincèrement que la mathématique Est en chacun d'entre nous et que notre seul devoir de prof, notre seul rôle, se résume à FAIRE REFLECHIR LES ELEVES.

Mais si la mathématique est en nous, elle est aussi autour de nous, elle fait partie de notre environnement, de notre quotidien.

« Le raisonnement mathématique, même le plus abstrait, surtout le plus abstrait, n'est accessible qu'à condition d'avoir une appréhension sensible, physique ... des notions abstraites. »

L'abstrait est tiré du concret...Les idées abstraites s'élaborent en observant le monde réel " (Marco Wolfs, op.cit.)

FS, op. Cft.)

Pour P. Jonnaert, il s'agit « d'établir une harmonie entre l'individu et son environnement physique ».

Le document ***Socles de compétences*** *met* également cet argument en avant dans sa toute première phrase :

« La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel. »

Le réel qui nous entoure se doit d'être un outil au service d'une meilleure compréhension de la mathématique à l'école.

**Des convictions partagées**

«Apprendre commence dès que l'on ose faire ce qu'on ne sait pas faire pour apprendre à le faire. » cité J.-M. Dumont.7

« Expliquer empêche de comprendre car cela dispense de réfléchir O.Basis

SOCRATE était un célèbre philosophe grec connu pour son APPROCHE UNIQUE de l’enseignement PAR LA QUESTION .

IL A DOUBLEMENT RAISON ! MILLE FOIS D’ACCORD !

« Il arrive que ceux qui veulent apprendre en soient empêchés par ceux qui enseignent. » Confucius

« Le bon concept est quelque chose qui n'apparaît jamais comme une chose en plus qui vient m'alourdir l'esprit mais au contraire m'allège. » Ph. Meirieu.

« On ne peut pas enseigner, on peut suggérer, essayer d'enflammer. » a dit Y. Menuhin

« Le bon élève est un voyageur sans bagages. Il ne s'agit pas de l'équiper mais de l'aiguiser, des yeux pour voir, des oreilles pour entendre, une tête bien faite, c'est-à-dire disponible, » G. Cesbron

« L'école doit être un atelier, un laboratoire, un lieu d'expériences et de réflexions

et non un studio d'enregistrement » P A. Osterrieth *(Faire des Adultes)*

*Ce que j'entendis, j'oublie*
*Ce que je vois, je m'en souviens,*
*Ce que je découvre, je le comprends.*
*Proverbe Chinois*

On ne pourra réconcilier la majorité des élèves avec les mathématiques que lorsqu'on aura réconcilié les mathématiques avec la vie. » M. Wolfs[B]

" Quand un enfant n'a pas réfléchi, il a perdu son temps. » disait Pierre Gauthy

On ne peut rien enseigner à un homme ; on peut seulement l'aider à trouver la réponse au fond de lui-même. Galilée

# II CACHEZ-MOI CE NOMBRE
# ET QUE LE NOM SOIT !

## GÉNÉRALITÉS

**À MÉDITER**

• Histoire vécue entre un instituteur, de plus en plus énervé, et un élève de huit ans, de plus en plus mal à l'aise :

1 : *Douze plus dix-sept égale(nt) combien ?*

E : …

1 : (En élevant la voix) *Douze...* ?

E : …

etc. etc.

1 : (De guerre lasse) *Mais enfin, mon ami, douze francs plus dix-sept francs* ça *fait combien s'il te plaît* ?

E : (Étonné) *Mais vingt-neuf francs...* [... *Voyons… !]* Belle leçon !

• Réflexion d'un élève (dix ans) qui osa dire tout haut ce que beaucoup pensent tout bas : « Moi, Monsieur, les chiffres m'impressionnent. »

• *Petit Robert :*

Chiffre : N. m. « écriture secrète » (XV$^{e}$). Écriture : représentation de la pensée et de la parole par des signes . Donc, chiffre : représentation secrète ……….. ?

ET VOILA !!!

• Approfondissons, avec G. Ifrah « Il est vrai que les nombres figurent parmi les concepts les plus complexes et les plus abstraits que l'espèce humaine a trouvés à sa portée. Cette invention est sans doute l'une des plus grandes conquêtes de l'humanité, pour ne pas dire la plus grande. Car du langage, de l'écriture et de l'arithmétique, *c'est* cette dernière que l'humanité a mis le plus de temps à assimiler. Au point que les peuples au cours des âges en ont éprouvé une certaine crainte mystique. »[9] ( ...) le petit d'homme possède en germe, le pouvoir d'assimiler, de recréer, étape par étape, toutes les conquêtes de la civilisation. »

« (...) l'enfance (...) correspond à un gigantesque travail d'élaboration et de RE-CRÉATION ; c'est une longue phase de préparation où l'on retrouve les divers stades de développement de l'intelligence humaine. » (Et il cite Claparède) : « L'être humain a besoin de cette longue période pour comprendre et assimiler les structures culturelles complexes auxquelles il devra s'adapter. À l'âge adulte, en effet, l'homme a perdu sa plasticité, son "aptitude à devenir". »

- Citons enfin Piaget selon qui le développement intellectuel passe par cinq étapes dont notamment le stade des opérations concrètes (4[e] étape, de 8 à 11 ans) où, malgré l'acquisition de certaines notions abstraites, la pensée reste liée au concret. La cinquième étape est celle des opérations formelles (12 à 14 ans) où « la pensée opère dans l'abstrait... »
- Conclusion : Ne brûlons pas les étapes !

**LE STATUT GRAMMATICAL DU NOMBRE**

***Le nombre n'est rien d'autre qu'un déterminant du nom !*** Nier la quatrième étape de Piaget, vouloir ignorer la primauté du NOM sur le déterminant, même et surtout pendant la leçon de calcul, serait vraiment « un péché contre nature. »

Voici une activité pour des enseignants mais valable égaiement au cycle 10-12 et plus. Examinons les phrases suivantes et arrêtons-nous en particulier aux mots soulignés.

*Jean* a *lu* <u>*quelques*</u> *pages.*

*Jean* a *lu* <u>*sept*</u> *pages.*

*Jean* a *lu la page* <u>*indiquée*</u>*.*

*Jean* a *lu la page* <u>*sept*</u>*.*

Ces quatre mots appartiennent à l'ensemble des déterminatifs du nom, ancienne dénomination englobant le déterminant, l'adjectif épithète, le groupe nominal complément du nom, la proposition complément du nom.

Les mots « <u>indiquée</u> » et « <u>sept</u> » sont des adjectifs superflus en ce sens que leur suppression nous laisse une phrase gardant encore une structure sémantique : Jean a lu la page.

Les mots « quelques » et « sept » sont des déterminants du nom dont la suppression rendrait la phrase bancale : Jean a lu pages.

Les déterminants (article, possessif, démonstratif, indéfini, numéral cardinal) ont donc un rôle plus important que les adjectifs (dont les numéraux ordinaux).

En quelque sorte, le déterminant est à l'adjectif ce que le complément du verbe est au complément de phrase (ex - complément circonstanciel).

Dans cet ouvrage, nous attacherons bien plus d'importance au nombre cardinal qu'au nombre ordinal (le « sept » de la dernière phrase signifiant septième).

Remarquons, au passage, l'incidence des deux classes de mots sur l'orthographe :

*Quatre-vingts pages* — *La page quatre-vingt*

*Deux cents ans* — *L'an deux cent*

Il est donc absolument évident, naturel - et donc inutile de le préciser aux enfants - que les déterminants et les adjectifs (y compris les nombres) « ne font pas le poids » face au NOM en dehors duquel ils n'existent pas et n'ont aucune raison d'être :

*Jean* a *lu sept* (?) / *J'ai bu trois* (?)

D'ailleurs, le tout jeune enfant, l'adulte apprenant les premiers rudiments d'une langue étrangère, le sourd-muet, se passent volontiers des déterminants tout en se faisant comprendre :

*Maman, bonbon !*

**OPTIONS FONDAMENTALES**

Sur base des réflexions ci-dessus, nous disons haut et fort que nous optons résolument et prioritairement pour les **OPÉRATIONS HABILLÉES** pendant toute la scolarité fondamentale.

Étayons encore notre propos par quelques citations.

- Ph. Jonnaert[10] signale que le terme « sept » sous son aspect ordinal n'évoque chez l'enfant que « avant huit, mais après six » tandis que sept pommes qui occupent un volume, une place, et qui sont comestibles, palpables font partie de sa « géométrie ».Le nom « pommes » permet ainsi de donner « corps » au nombre.

• S. Baruk : « Vouloir ignorer la matière, c'est vouloir forcer des millions d'enfants à ne pas voir ce qu'ils voient, à voir ce qu'ils ne voient pas, à entendre et dire ce qui ne s'entend pas et à quoi ils n'entendent rien. « [11] Elle cite Nietzsche: « Plus abstraite est la vérité que tu veux enseigner, plus il te faudra séduire les sens en sa faveur. » Elle cite encore Diderot : « Les mathématiques pures entrent dans notre âme par tous les sens. »

• Georges Van Hout[12] écrit qu'il faut se persuader de « n'accepter de concept nouveau qu'engendré par des manipulations concrètes, faute de quoi , l'on maniera mécaniquement des signes traités par des règles dépourvues de sens »

Priorité absolue aussi à la **MATHÉMATIQUE ORALE**.

• J. Masset : « La crainte de mal dire fait des enfants des muets. S'exprimer rigoureusement n'est pas un préalable à l'activité mathématique mais l'effet d'une telle activité. (...) Le raisonnement est pour le jeune enfant d'abord et avant tout un travail dans sa langue orale, dans sa langue maternelle. »[13]

Permettons à l'enfant de raconter les étapes de sa recherche, de verbaliser sa démarche en la justifiant. Voilà l'essentiel ! Invitons-le ensuite à rédiger son « histoire » afin de l'aider petit à petit à s'exprimer rigoureusement (gain de temps considérable).

Alors et seulement alors, nous oserons passer au codage au moyen de « signes conventionnels, à sens bien défini et représentant un langage, ces signes étant tels qu'ils soient en mesure d'être émis et reçus, qu'ils soient également compris par les DEUX interlocuteurs et qu'ils soient associés à la langue parlée. »[14]

Enfin, et ce n'est pas le moindre : « Il faudra encore, à l'école fondamentale, démystifier autant que possible la complexité de la langue mathématique écrite en parlant français d'abord -beaucoup et longtemps -, en écrivant en français ensuite. Il faudra permettre à l'enfant plusieurs approches de cette écriture très spéciale qu'imposent les mathématiques quand il en éprouvera le besoin. »

Ce type d'activité personnelle ne pourra susciter en lui que du plaisir et le rassurer quant au niveau de ses capacités. » [15]

## LE NOMBRE ENTIER

Ce chapitre sera essentiellement le reflet d'une série d'activités vécues par les tout-petits d'une première année. ( 6 ans ) Rappelons que toutes les activités recensées dans cet ouvrage ont *été* vécues de nombreuses fois avec des enfants de milieux fort différents.

Mais prenons d'abord un peu de recul théorique.

### D'UNE INCAPACITÉ NATURELLE ET ÉTONNANTE

C'est encore G. Ifrah qui nous interpelle : « Mettons-nous en présence d'une série d'êtres ou d'objets analogues alignés et proposons-nous d'en indiquer la quantité d'un seul et rapide coup d'œil, c'est-à-dire sans l'intervention d'un artifice. Jusqu'où sommes-nous capables d’aller ?...

Nous distinguons sans erreur et au premier coup d’œil : un, deux, trois et même quatre éléments. Mais là s'arrête notre pouvoir d'identification des nombres. Car au-delà de quatre, tout se brouille dans notre esprit et notre vision globale ne nous est plus d'aucun secours ».

Il précise « L'œil, pour ainsi dire, n'est pas un instrument de mesure suffisamment précis ; son pouvoir de perception directe des nombres dépasse très rarement -pour ne pas dire jamais -le nombre quatre ! »

Il nous fait aussi remarquer que « dans la pratique, lorsque nous voulons discerner telle ou telle quantité nous avons recours à la mémoire ou à des procédés comme la comparaison, le dédoublement, le groupement mental ou, mieux, à la faculté de comptage abstrait. »

Le passage de l'écriture mnémonique IIII au ~~IIII~~ repose probablement sur cette incapacité mentale naturelle de compter visuellement au-delà de quatre !

La « pauvreté » du pouvoir de l'œil nous incite à nous interroger sur l'efficacité du schéma (ou du schème) « traditionnel » des nombres affichés en classe. Assurément, l'utilisation régulière de dés, de jeux de cartes, de dominos, permettra au jeune enfant de reconnaître de plus en plus vite des nombres de un à dix. Mais pourquoi se limiter à ce matériel alors que l'environnement est si riche.

En accompagnant sa maman au magasin, il ira plus loin dans sa découverte des nombres :

- la boîte de quatre mousses au chocolat
- la boîte de six œufs, le carton de six canettes
- le casier de douze bouteilles
- le casier de vingt-quatre bouteilles
- l'ensemble de huit canettes de limonade
- le paquet de huit gaufrettes
- la boite de trois/cinq friandises alignées
- le tube de dix bonbons Fruit-tella alignés.
- et aussi, près des caisses, une dernière tentation : puiser trois berlingots dans ce carton de vingt ou trente.

En allant régulièrement au magasin, il aura peu de chance de rencontrer un ensemble de sept, de onze, de treize ou de dix-neuf boissons ou autres objets de convoitise.

Il sera par contre confronté aux nombres « riches» ... et par la même occasion à la commutativité de la multiplication : 3 rangées de 4 b. ou 4 rangées de 3 bouteilles.

À la demande de l'adulte de prendre douze pommes , il choisira soit :

- deux paquets de six pommes
- trois paquets de quatre pommes
- ou, à défaut, il lui faudra prendre en vrac en les comptant une à une.

Et ainsi, en agissant, il saisira petit à petit l'importance capitale de l'utilisation d'une « base » [16]

Un matériel didactique par excellence sera aussi l'enfant lui-même comme <u>unité</u> parmi les membres sa famille, amis de sa classe (cf. page ci-contre).

Liste de matériel semi-concret indispensable dans toute classe : un tableau quadrillé, du papier du même type ; un $dm^3$, vide, transparent ; un minimum de dix planchettes de 100 $cm^3$ (jaunes par exemple) ; un minimum de réglettes de 10 $cm^3$ (bleues) ; un maximum de cubes de un $cm^3$ (rouges).

(dans des magasins spécialisés dans du matériel didactique .)

Chaque enfant « DOIT » avoir son $DM^3$ PERSONNEL qui lui sera précieux tout le temps ! Indispensable ! IL visualise les nombres !

**PROUESSES : DES MATHS TOUS AZIMUTS ••• À SIX ANS**

Construire les premiers jalons de notions aussi complexes que celles du nombre premier, de commutativité, de compensation ou encore d'un carré d'un nombre est possible par des enfants très jeunes.

Encore faut-il des conditions pédagogiques favorables si on veut que nos élèves réalisent de telles prouesses. Parmi ces conditions favorables, on peut citer : confronter nos élèves à des situations problématiques, leur permettre de les résoudre en prenant appui sur du matériel concret et ainsi les inciter à s'exprimer dans un langage courant bien avant d'exiger d'eux l'utilisation d'un langage abstrait. Les activités décrites ci-dessous ont été menées dans une classe de première primaire par un professeur extérieur (enseignant désigné par la lettre P) ; elles ont commencé au moment où la classe en était à l'étude du nombre « sept ». Les différentes périodes décrites se sont évidemment étalées dans le temps. Dans ces activités, le lecteur découvrira des notions mathématiques comme : nombre premier, commutativité, compensation, carré d'un nombre, dizaine, écriture positionnelle, passage par la dizaine, technique de soustraction, multiplication, division …

*Mon métier, mon seul devoir est de te dire que tout est possible.*
*Julos Beaucarne*

**1" période**

Six élèves, invités pour une leçon de gymnastique à se mettre en rang en se donnant la main réalisent spontanément la solution suivante.

P
E ------- E
E ------- E
E------- E

Contournant le groupe, le professeur demande de tourner d'un quart de tour vers la droite et de donner la main aux nouveaux voisins.

E E<br>
| |<br>
E E P<br>
| |<br>
E E

COMMUTATIVITE

Et avec 7 gymnastes ?

E —— E<br>
E —— E P<br>
E —— E<br>
E

P : *Le dernier doit être triste de se retrouver seul ! Ou tout le monde est seul ou personne.*

Les élèves font jouer la solidarité :

P<br>
E —— E<br>
E —— E<br>
E —— E —— E

P: *Avez-vous déjà vu un rang pareil à la gymnastique?*

E: *Il n'y a pas moyen de faire autrement, il faut se mettre « à la queue leu leu». Comme ça* :

P<br>
E<br>
E<br>
E<br>
E<br>
E<br>
E<br>
E

E : *Ou comme ça* ; *on est toujours sur une seule ligne.*

E E E E E E E

P : *Pouvait-on mettre les six élèves aussi* à *la queue leu leu* ?

E : *Oui, mais* ce *n'est pas gai.*

P : *Et huit élèves* ?

Rapidement les solutions suivantes sont trouvées.

```
      P                              E   E
  E —— E                             |   |
  E —— E                             E   E
  E —— E                             |   |      P
  E —— E                             E   E
                                     |   |
                                     E   E
```

On s'exprime ainsi : *Deux... deux... deux... deux ou quatre... quatre.*

P : *Pouvait-on aussi* se *mettre* à *la queue leu leu?*

E : *Oui mais* ce *n'est pas nécessaire.*

P : *Et avec neuf élèves, comment faire* ?

E : (réfléchissant) *À la queue leu leu.*

P : *Sûr ?*

Et les élèves d'essayer.

```
        P
  E —— E —— E               E    E    E
  E —— E —— E               |    |    |
  E —— E —— E               E    E    E    P
  E —— E —— E               |    |    |
                            E    E    E
```

Et de s'exprimer : *Trois... trois... trois / trois... trois... trois.*

Et de conclure spontanément :

E : *Que c'est beau ! C'est un carré .*

P : *Et avec dix élèves ?*

E : (en s'exécutant) *Deux... deux... deux... deux... deux ou cinq... cinq.*

P : *Onze élèves ?*

E : (rapidement) *à la queue leu leu !*

P : *Et douze élèves ?*

E : (Un enfant s'exclame) *Apres un queue leu leu ii n'y a sûrement pas un nouveau queue leu leu !*

Analyse de la séquence

Le professeur s'est rendu compte que ces enfants de six ans « ressentaient » en eux le concept de... nombre premier. Ce même jour, ces enfants ont *trouvé* tous les « queue leu leu » jusqu'à dix-neuf.

## 2e période

P : *Combien êtes-vous en classe ?*

Plusieurs E : *Vingt-quatre.*

P : *Comment l'avez-vous trouvé ?*

E : *Je les ai comptés.*

E : (Un autre) *Huit... huit... huit... vingt-quatre.*

P : *Bravo.*

P : *inventez maintenant toutes les possibilités de vous mettre en rang pour la gymnastique.*

Les élèves ont joué les nombreuses possibilités offertes par ce nombre « riche ». Le professeur les a écrites en toutes lettres au tableau :

P : *Cessons de dire deux... deux... Nous pouvons dire (et écrire pour la première fois) douze rangées DE deux élèves ou douze fois deux élèves.*

Notons que pour certains enfants, ii faut beaucoup de temps avant qu'ils ne parviennent à formuler aisément ces phrases en connaissance de cause.

Prudence donc, et ne passons pas trop vite a un apprentissage stérile des tables.

Analyse de la séquence

Ces élèves venaient de dévoiler leur capacité de « voir » la commutativité et la compensation dans la multiplication :

*Douze fois deux élèves ou deux fois douze élèves. Quatre fois six élèves ou deux fois douze élèves.*

**3e période ou du concret au semi-concret**

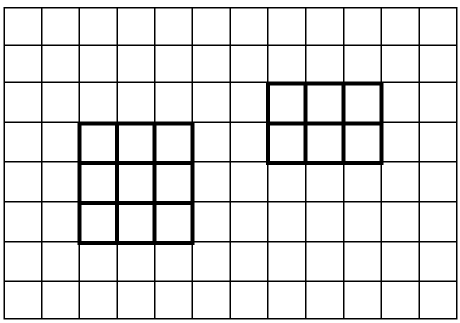
Même travail que lors des deux périodes précédentes mais en remplaçant les élèves par des boîtes de biscuits carres dessinées sur papier quadrille ou au tableau (en faisant usage de plusieurs craies de couleur).

Force était de constater que pour les nombres « riches » les élèves étaient enclins à dessiner les boîtes les plus compactes possible, celles qui s'approchent le plus du carré *(car ce sont les plus belles boîtes).*

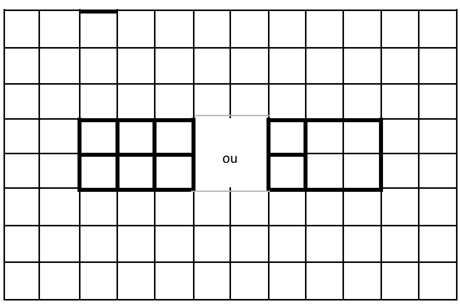
E : *Une boîte de treize biscuits, ça n'existe pas en magasin !*

E : *Un casier de douze bouteilles à la queue leu leu n'existe pas dans le magasin !*

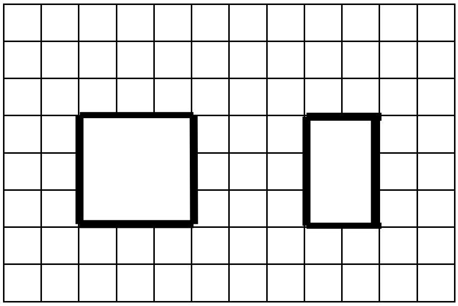
Dans un premier temps, les élèves encadraient chaque « biscuit »



Ensuite à la demande d'aller plus vite ils groupaient les biscuits.



P : *Qui peut dessiner une boîte vide qui pourrait contenir neuf ou six biscuits ?*



Analyse de la séquence

Ces élèves de six ans ont ainsi tracé taus les rectangles et carrés possibles à partir de l'aire donnée (entre un et vingt-cinq). COMME ILS LE FERONT A 11 ANS EN GEOMETRIE…avec moins de succès bien souvent.

**4" période, dans un tout autre registre**

Entre-temps, leur institutrice leur avait fait découvrir la lecture et l'écriture des dix premiers nombres, ainsi que le zéro.

Une prise de conscience

P : (À propos de 10) *Bizarre. Voilà deux signes, deux chiffres. Inventez-moi « votre propre dix » en un seul dessin.*

Les élèves donnant libre cours à leur imagination et proposent un large choix (poisson, carré, etc.…).

P : Il *faut en choisir un.*

De commun accord les élèves choisissent le dessin d'un petit poisson. P : *Est-ce que les élèves de l'autre première auront aussi choisi un petit poisson ?*

E : *Bien sûr que non...* (se rendant compte par la même occasion de la nécessité absolue de L'invention de signes communs à tous : les signes conventionnels).

P : *Mais pourquoi écrit-on « dix » avec deux chiffres ?*

Constat : A ce stade, et contrairement à leurs ainés de deuxième, les élèves n'ont pas pu exprimer ce qu'ils devaient probablement ressentir :

Qu'aucune mémoire humaine ne parviendrait à assimiler un nombre infini de signes uniques, représentant chacun un nombre différent.

P : (Montrant un sac transparent rempli de centimètres cubes rouges). *Voilà, nous allons imaginer que ce sont des bonbons rouges. Pouvez-vous dire combien il y en a ?*

E : *Il faudra les compter un à un.*

P : (Montrant une réglette bleue de dix centimètres cubes). *Imaginons que c'est un paquet de bonbons rouges. Combien y en a-t-il ?*

E : (Par juxtaposition). *Il y en a dix. La réglette, c'est la même chose que dix bonbons.*

P : *Soyons clairs : que voient vos yeux ?*

E : *Un paquet bleu.*

P : *Que voit « notre tête » dans le paquet ?*

E : *Dix bonbons.*

P : *Voyez-vous vraiment les bonbons ?*

E : *Non, ils sont cachés.*

P : *C'est vrai, il faut les imaginer. J'écris au tableau en deux couleurs. Un paquet bleu « 1 » ; aucun bonbon rouge « 0 » C'est comme ce paquet de 10 Fruit-tella.*

<u>De l'oral au code</u>

P : *Dans cette grande boîte remplie de « paquets » bleus, je verse mon sac de bonbons rouges et je mélange tout. Prenez le plus rapidement possible : vingt, trente, quarante... bonbons. Ecrivez chaque nombre en deux couleurs au tableau.*[11]

P : *Et maintenant dix-sept, dix-huit, vingt-cinq (toujours en deux couleurs) et dix-six, dix- deux...*

E : *Non, Monsieur, on dit seize, douze...*

<u>Du code à l'oral</u>

Le professeur écrit différents nombres au tableau, toujours en deux couleurs. Les élèves prennent les nombres correspondants et les lisent.

P : *Allons-nous toujours écrire les nombres en plusieurs couleurs ?*

E : *Non.*

P : *Qui vient écrire à la craie blanche ?*

E : *Moi ! Moi* ! *Moi* !...

5e **période**

P : *Voici sept bonbons. Combien en faut-il encore pour faire dix ? Prouve-le -moi.*

E : *Trois... avec geste a l'appui.*

P : Montrant trois réglettes et quatre cm[3]. *Combien de bonbons ?*

E : *Trente-quatre.*

P : *Ecris.*

P : *Combien en faut-il encore pour avoir quarante bonbons ?*

E : Six. etc

P : *Voici un paquet de dix bonbons. Tu peux en prendre deux ; Combien en restera-t-il ?*

E : (En remplaçant la réglette par dix cubes). *Je les déballe.* (Ensuite il en prend deux et déclare qu'il en reste huit).

P : *Voici quatorze bonbons : combien peut-on en manger sans ouvrir le paquet de dix ?*

E : *Un ou deux ou trois ou quatre.*

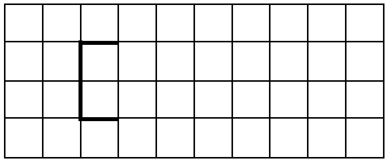
P : *Et si je t'offre six bonbons, comment fais-tu ?*

E n° 1 : *Je mange d'abord les quatre bonbons et puis j'en prends encore deux dans le paquet... il en reste encore huit.*

E n° 2 : *J'ouvre le paquet et j'en mange six. Il en reste quatre et avec les quatre « vieux » ça en fait huit.*

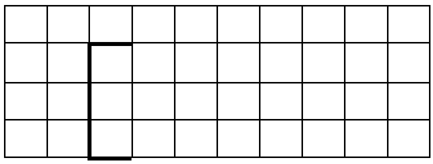
**6e période**

P : *Voici le bord d'une boîte de huit biscuits. Continuez le dessin.*



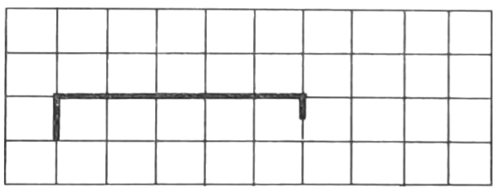
P : Et si c’était le bord d’une boîte de quatre biscuits, de six biscuits…

P : Voici le bord d’une *boîte* de six, neuf biscuits…Continuez le dessin.



Au cycle 10-12 : longueur de rectangle = aire : largeur

Continuer ce dessin de 25 biscuits



E : Oh, c’est un carré !

P : Vous aimez les carrés, n’est-ce pas ? On va s’amuser la prochaine fois !

## 7e période :

P : Quelle est la plus petite boîte carrée… de biscuits carrés

E : Une *boîte* avec 1 biscuit

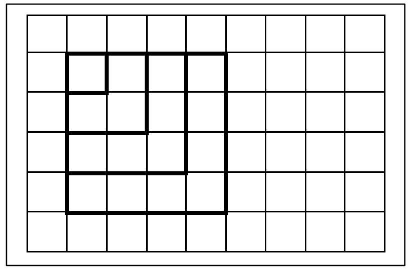
P : Dessinez- la

P : Quelle est la boîte suivante ?

P : Continuez sur le même dessin.

Etc.

À la fin, les élèves obtiennent un dessin pareil :



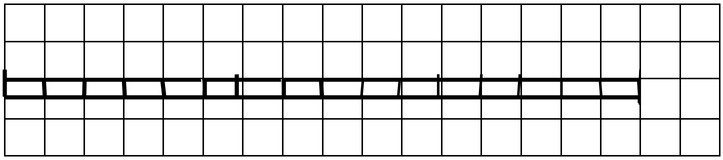
**P** : *Combien de biscuits dans chaque boîte ?*
**E** : *Un, quatre, neuf, seize, vingt-cinq, trente-six.*
**P :** *Stop.*

**P** : *Dans cette dernière boîte, combien de biscuits par rangée ? Combien de rangées ? Comment pourrait-on parler de cette boîte sans dire le nombre de biscuits qu'elle contient ?*
**E** : *Six rangées de six biscuits.*
**P** : *Et les boîtes suivantes ?*
Etc.

**P** : *Et la dernière ?*
**E** : *Dix rangées de dix biscuits.*
**P** : *Et cela fait combien de biscuits ?*
**E** : *Cent.*
**P** : *Bravo, les enfants.*
**E** : *C'était chouette.*

**P** : (Intrépide) *Maman a apporté une boîte de huit biscuits et j'ai fait une bêtise.*
**E** : *Tu les* as *mangés ?*
**P :** *Non.*
**E** : *Tu les* as *cassés ?*
**P** : *Oui, en deux. Qui peut dessiner cela ?*
**E** : (Celle que l'on attendait le moins) *Moi.*

Et en prenant son temps, elle dessine ce qui suit.



P : (À l'oreille de l'institutrice) *En fait ,ça correspond à « huit divisé par zéro virgule cinq égale seize » !*

L'institutrice : *Pardon ?*

P : *Il faut le faire à six ans ! !* !

## 8· période

P : *On va jouer aux cartes. Voici un jeu. Combien de cartes dans ce jeu ?*

E : *Cinquante-deux.*

P : *On va jouer à deux ; comment faire ?*

E : *Une, une / une, une / une, une*

P : *C'est bien mais on va abandonner un moment les cartes.*

E : *Oh !*

P : *On va manger des bonbons.*

E : *Ah !*

P : (En montrant cinq réglettes bleues et deux $cm^3$ rouges) *Voici cinquante-deux bonbons pour deux enfants, Jean et Marie. Comment allons-nous faire ?*

E : *D'abord deux paquets pour Jean, deux paquets pour Marie.* (En remplaçant la cinquième réglette par dix $cm^3$). *Puis, on déballe le dernier paquet et on donne cinq bonbons à Jean et cinq à Marie. Et on donne encore un bonbon* à *chacun. Et c'est fini.*

P : *Chacun en a reçu combien ?*

E : ... *vingt-six bonbons.*

P : *On reprend les cartes. Alors, cinquante-deux cartes pour deux enfants, chacun en recevra combien ?*

E : *Vingt-six !*

P : *Nouvelle distribution de bonbons : cinquante-deux bonbons* *pour quatre enfants. Ils recevront plus ou moins de bonbons*

E : *Moins.*

P : *Au travail !*

E : *Treize.*

P : *Très bien. Et cinquante-deux bonbons pour trois enfants ? Au travail !*

E : *Oh ! Il en reste un !*

**Analyse finale des huit périodes**

Totalement à leur insu - heureusement - les élèves ont effectué toutes les opérations et bizarrement ou naturellement davantage de soustractions et de divisions que d'additions ou de multiplications. N'est-ce pas un reflet de la vie de l'enfant-consommateur ?

**De la 9e période (à 7 ans) ... à la 99e période (à 12 ans) :**

Comme les bonbons sont appréciés à tous les âges, veillons à ce que notre stock reste toujours inépuisable ! ! Plus pragmatiquement, voyons comment tirer parti de notre matériel didactique (semi-concret) pour continuer à construire la notion du nombre :

- Tout d'abord, visualiser de grandes quantités : puisque 1 cube ($cm^3$) est utilisé pour 1 bonbon, alors :
  - la réglette bleue vaut 10 bonbons,
  - la planchette jaune vaut 10 paquets de dix bonbons ou 100 bonbons
  - le cube (creux) tout entier ($dm^3$) pourra être rempli par . ?.. bonbons ou par .. ?. ou par:.. ?..
  - 10 cubes valent...( plus tard)
  - et, dans un autre cycle, 1 $m^3$ vaudra un million de bonbons.
- Ensuite la manipulation permet en un tournemain de trouver le complément de 53 à 100, de 279 à 300, de 879 à 1 000 et ça saute aux yeux ! Comment faisaient (ou font) les petits commerçants pour rendre la monnaie ?
- Exemple : De 76 centimes à 1 €, on remet d'abord 4 centimes « pour faire 80 », puis 20 centimes (et pas 30 !) « pour faire 100 ».

ANECDOTE

« Pauvre épicier »qui remettait 63€ pour un achat de 47€. Et il insistait même. Il ne l'a plus fait depuis ce jour.

Et quand notre provision de bonbons sera mangée et quand tout notre argent sera dépensé, il nous suffira de fermer les yeux…pour les faire revivre d'une façon « image-innée ». Ne serait-ce pas la « Gestion Mentale » ?

NB :

On est loin des programmes figés :En première année, il faut apprendre à compter et calculer jusqu'à 100 . (mea culpa)

## UN ENTIER COMME UN AUTRE :

## LE NUMÉRATEUR DE LA FRACTION

**AVIS CONCORDANTS**

Au XIXe siècle : « Dieu a créé le nombre naturel (entier) ; le reste est l'œuvre de l'homme.» Kronecker (mathématicien allemand).

Au xxe siècle : Dans son interprétation de cette « sentence kronékienne , G. Van Hout termine ainsi « ( ...) on pourrait affirmer que tous les nombres interprétables dans l'Univers physique sont réductibles aux nombres naturels. »[18]

Nous osons dire (au nom de l'enfant) : « Et s'il n'existait tout simplement rien d'autre que des nombres entiers ! »

**QU'EN PENSE L'ENFANT** ?

À 4-5 ans : il n'en pense rien ! À table, chaque jour, il VOIT des pommes, des glaces, des desserts, les uns meilleurs que les autres, des MORCEAUX de tarte... Il voit également que pour les tartes de même grandeur, il y a de grands morceaux et des petits et que cela dépend du nombre de convives à table...

Il voit cela également dans les boîtes rondes de fromage fondu tartinable : les six portions de telle marque sont plus grandes que les huit portions de telle autre...

À 7-8 ans : il apprendra à spécifier en découvrant le NOM de ces morceaux. Ils s'appelleront sixième, cinquième, septième... quart (quatrième) - tiers (troisième) - demi (deuxième).

*NB : Un « deuxième » de tarte est la moitié d'une tarte et s'appelle une « demi-tarte ». On ne dira jamais· « un demi de 36 euros » mais bien « la moitié de 36 euros ».*

Remarque : pourquoi ne pas « découvrir » les quarts et les tiers après les cinquièmes et les sixièmes... ?

**RESTONS NATURELS**

Comment approcher la notion de fraction ? Lentement, mais sûrement !
Regardons cette tarte...

qui devient :

Écoutons l'enfant en bas âge.

*Un morceau pour moi. Cinq morceaux pour les autres.*

Écoutons l'enfant au cycle 5-8 :

*Un sixième pour moi. Cinq sixièmes pour les autres.*

Écrivons (un jour... et pendant longtemps)

*Un* sixième. *Cinq* sixièmes (attention à l'orthographe).

Comment approcher l'écriture de la fraction ?

- Lentement, très lentement !
- Cherchons ensemble à abréger, tout en parlant. (Comme avec

« Cinq euros » → 5€). Progressivement

| | |
|---|---|
| 1 sixième | 5 sixièmes |
| 1 6ème | 5 6èmes |
| 1 6e | 5 6es |
| $\boxed{\frac{1}{6}}$ et | $\boxed{\frac{5}{6}}$ |

deviendront les « signes conventionnels ».(En CONVENIR avec les enfants)

- Faisons longtemps usage de deux couleurs (numérateur/dénominateur). CONCLUONS avec les enfants :
- L'œil (l'organe de la vue) voit deux chiffres, deux nombres.
- Mais « l'œil de l'âme » (N. Rouche) ne voit QU'UN SEUL NOMBRE,

le déterminant (nombre) «cinq» précédant le NOM «sixièmes».

Voilà la CLEF qui démystifie la fraction ! « L'essentiel est invisible aux yeux... »

- Confrontons la grammaire et la mathématique :

| Grammaire | Mathématique |
|---|---|
| 5 (Déterminant) | 5 (numérateur) |
| 6 (nom commun) | 6 (déNOMinateur) |

**COMPARONS LES FRACTIONS** :

« Quel est le plus grand morceau : un tiers ou un sixième ? »

Comparons :

- avec du papier et des ciseaux
- en dessinant
- en imaginant
- en s'exprimant librement d'abord
- puis à l'aide des deux mots-clefs qui incitent automatiquement à réfléchir: Si... alors

Si 1/5 est le double de 1/10

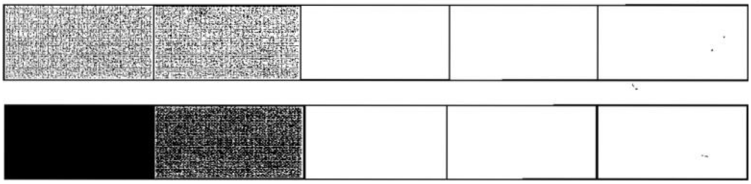
Alors, 1/10 est le moitié de 1/5

## Conventions

- Il est plus facile de dessiner des tartes rectangulaires (des cakes, des pizzas).
- Pour reconnaître la fraction dont on veut parler (ex: 2/5 d'une tarte), il est indispensable de dessiner l'unité entière, de la fractionner et de colorier la partie visée (la partie visible : 2/5), le reste restant vierge.

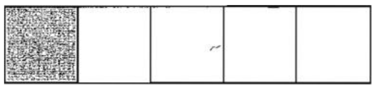
Dessinons

ou

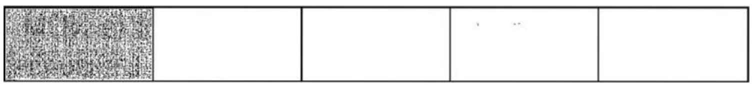


- . Un cinquième ne vaut pas toujours un autre cinquième, c'est relatif à l'unité de départ. Découvrons cela aussi avec les enfants !

Un petit cake :



Un grand cake :



## Progression dans l'écriture : rappel

Deux morceaux de la tarte

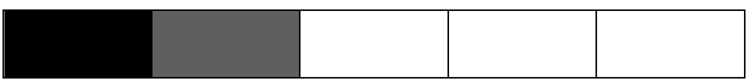
Deux cinquièmes de tarte

2 cinquièmes de tarte

2/5 tarte.

**DÉCOUVRONS LES PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS**

### Première propriété



**A.**

**B.**

*Comparons le contenu de ces deux plateaux : A et B Combien de morceaux en haut/ combien de morceaux en bas... Quel est leur nom ? Où y a-t-il le plus à manger ?*

*Pourquoi ?... Le moins ? Pourquoi ?....*

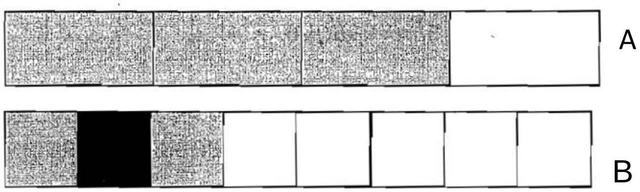
E : *Cela saute aux yeux, Monsieur!*

Selon l'âge des élèves et leur progression, respectons <u>leur expression</u> <u>propre</u> et ne passons qu'au moment opportun au langage mathématique : *Prendre (deux fois) plus de morceaux c'est multiplier le numérateur (par 2)* [cycle 10-12 et plus].
*Prendre (deux fois) moins de morceaux c'est diviser le numérateur (par 2)* [cycle 10-12 et plus].

Ensuite on réemploiera le langage courant :

*Multiplier le numérateur c'est prendre (2 fois) plus de morceaux* [cycle 10-12 et plus].
*Diviser le numérateur c'est prendre (2 fois) moins de morceaux* [cycle 10-12 et plus].

<u>Deuxième propriété</u>




P : *Combien de morceaux en haut et combien de morceaux en bas... Quel est leur nom ? Quel est le plus grand « plateau » ? Pourquoi ?...Le plus petit ? Pourquoi?...*

En confrontant le dessin et l'écriture on remarquera et on <u>dira</u> [cycle 10-12]:

*Prendre des morceaux plus grands, c'est comme diviser le dénominateur.*
*Prendre des morceaux plus petits, c'est comme multiplier le dénominateur.*
*Prendre des morceaux deux fois plus grands, c'est diviser le dénominateur (par 2).*
*Prendre des morceaux deux fois plus petits, c'est multiplier le dénominateur (par 2).*

Ensuite on reviendra au langage courant :

*Diviser le dénominateur (par...) c'est prendre... Multiplier le dénominateur (par...) c'est prendre...*

Activités de structuration ORALES et synthèses :

- Compléter le tableau :

Français Mathématique

Prendre.....................c'est → ..............................

.....................................c'est ← diviser le ....................................

etc.

- Suivant l'âge on posera ces questions :

  *Combien de moyens avons-nous pour prendre plus/moins ? Combien de façons pour rendre une fraction plus grande/petite ? Combien de façons pour multiplier/diviser une fraction ?*

  *Dites-le en langage courant.*
  *Dites-le en langage mathématique.*

- Applications relatives aux découvertes ci-dessus, sur base d'un dessin, aussi longtemps que nécessaire ; ensuite l'imagination fera le reste:

Quelle sera la meilleure façon (la plus pratique, celle que l'on utiliserait dans la réalité quotidienne, dans la cuisine) de prendre la moitié :

- de un septième de tarte ?
- de deux septièmes de tarte ?
- de quatre septièmes de tarte ?
- de trois septièmes de tarte ? (Il y aura discussion !)
- etc.

Comment s'appelle la moitié :

- d'une demi-tarte ? / d'un tiers ? / de deux tiers ?
- d'un quart ? / de deux quarts ?
- d'un cinquième de tarte ? / de deux cinquièmes ?
- etc.

Comment s'appelle le double :

- d'un sixième de tarte ? / d'un tiers ? / d'un quart ?
- d'un cinquième de tarte ?
- etc.

Quel est le <u>nom</u>

- du double d'un sixième ?
- du triple d'un neuvième ?

-etc.

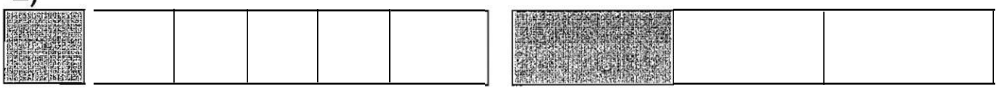
Comparons:

*À gauche, y a-t-il plus ou moins qu'à droite ?*

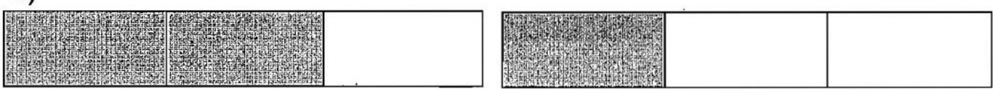
*Combien de fois plus ou moins* ?

1)

2)



3)



4)

Ensuite, en cheminant prudemment vers les expressions nouvelles proposées dans la partie sur la division et qui déboucheront un jour sur des opérations pleines de sens (formulation à parfaire selon l'âge et le niveau de vocabulaire des enfants) :

1) *Une demi-tarte est ... fois plus grande qu'un quart de tarte.*
2) *Un sixième de tarte comparé à un tiers de tarte c'est quelle partie?*
3) *2 tiers de tarte par rapport à 1 tiers de tarte le valent... fois.*
4) *Un quart de tarte vis-à-vis de trois quarts de tarte en vaut quelle partie?*

Vous coderez plus tard les différentes activités décrites ci-dessus en langage mathématique (cf. La comparaison des fractions).

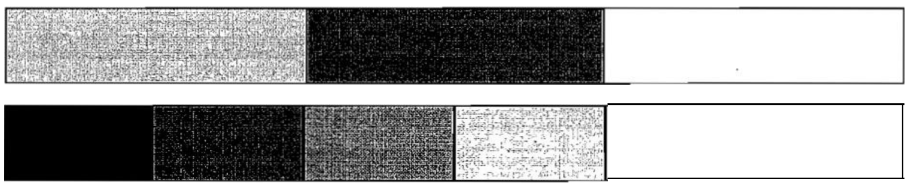
Petite analyse rétrospective.

Les élèves viennent sans s'en rendre compte de toucher aux trois aspects de la fraction :

- fraction - fractionnement: expression d'une ou plusieurs partie(s) d'une unité : 3 quarts de pizza, 5 huitièmes d'un rectangle.
- fraction - opérateur : la moitié de 4 billes, de 4 francs, de 4 septièmes.
- fraction - quotient (rapport) : un sixième de tarte comparé à un tiers de tarte en vaut la moitié.

Troisième propriété

- Comparons ces deux plateaux de haut en bas, puis de bas en haut :



*Combien de morceaux ? Leur nom ?*

*Le plus grand plateau ?*

*Essayez d'expliquer !*

Langage courant :

*En haut, il y a ... morceaux qu'en bas mais ils sont ...*

*En haut, il y a ... fois ... de morceaux qu'en bas mais ils sont ...*

Conclusion :

*4 sixièmes de tarte c'est la même chose que 2 tiers de tarte.* On écrira plus tard :

4 /6=2/3

Approche du langage mathématique [cycle 10-12] :

*De haut en bas, que s'est-il passé avec le numérateur ? Que s'est-il passé avec le dénominateur ?   De bas en haut, que s'est-il passé... ?*

Complétons les paroles du prof de maths [cycle 10-12]. De haut en bas :

*Quand on.... le ..... et le ..... d'une fraction par un ...nombre,*

*la fraction reste .....*

De bas en haut :

*Quand on .....*

*Ce sont des fractions équivalentes.*

- Coupons peu mais coupons bien.

*Si la tarte est encore entière, quelle sera la meilleure façon (la plus simple, la plus économique, la plus logique) d'agir : couper quatre sixièmes ou deux tiers ?*

*Trouvons une meilleure façon de couper 2 sixièmes de tarte ....*

*Donc 2/6=1/3*

*Trouvons une meilleure façon de couper 3 neuvièmes de tarte....*

*Donc 3/9=1/3*

*Que faut-il penser de ces trois fractions ? .....*

*Trouvons encore d'autres façons de couper l'équivalent.*

On écrira plus tard :

*t* =   *t* =   *t* =   *t* =   *t* =   *t* =

- Conclusion

« Coupons peu mais coupons bien » sera notre slogan pour trouver la fraction <u>la plus simple</u> parmi plusieurs fractions équivalentes.

« Coupons peu mais coupons bien » sera notre secret pour <u>simplifier</u> une fraction.

Note : Il est tout aussi important de partir d'une fraction simplifiée vers une autre équivalente (que le contraire).

- Activités
  Dire : *trois sixièmes d'une tarte c'est la même chose que...*
  Écrire : *3 sixièmes de tarte = une demi-tarte.*
  3/6t = 1/2t etc.

## Remarques diverses

- Gardons-nous bien de simplifier « gratuitement » **(mea culpa)** :

  $$\frac{95}{114} \quad \text{voire} \quad \frac{28}{84}$$

- Gardons-nous bien de vouloir étudier le PGCD... puisque les élèves l'entrevoient spontanément.
- Ne perdons pas de vue : Pas de fractions pour les fractions ! Elles sont, d'abord et avant tout, au service d'une meilleure compréhension des nombres à virgule, du pourcentage... et des opérations.
- Ce chapitre s'attarde longuement à la « fraction-nombre » ou « fraction-fractionnement». Signalons que la « fraction-opérateur » et la « fraction-rapport » (quotient) mériteront toute l'attention requise dans les chapitres consacrés à la multiplication et aux divisions.

## « ZÉRO... POUR ZÉRO VIRGULE »

## OU LES GRANDEURS

### DE CAUSE À EFFET

Voici le résultat-type obtenu par l'ensemble des élèves d'une sixième auxquels on avait proposé ces 15 exercices de calcul mental :

| | | |
|---|---|---|
| 0,2 + 0,3 = 0,5 √ | 0,3 x 0,4 = 0,12√ | 0,12: 0,6 = 0,2√ |
| 0,12 + 0,15 = 0,27√ | 0,2 x 0,4 = ~~0.8~~ | 0,15: 0,5 = 0,3√ |
| 0,12 + 0,6 = ~~0,18~~ | 0,25 x 0,5 = 0,125√ | 0,21 : 0,7 = 0,3√ |
| 0,57 - 0,15 = 0,42√ | 0,25 x 0,3 = ~~0,75~~ | 0,75 : 0,15 = ~~0,5~~ |
| 0,37 - 0,2 = ~~0,35~~ | 0,5 x 0,6 = 0,30√ | 0,48 : 0,12 = ~~0,4~~ |

,

Étonnements et réflexions : *J'ai 9/15 mais je ne sais pas pourquoi j'ai six fautes.* La raison de ces erreurs est par trop évidente : penser et parler en termes de « zéro virgule... » est une pratique dangereuse, encore trop fréquente chez nos enfants et encore trop souvent tolérée par bon nombre d'enseignants

Exemple vécu en sixième : 0,37 - 0,2 = ~~0,35~~ ( Kity )

*Je sais bien que* 37 *cm moins 20 cm font 17 cm mais zéro virgule 37 moins zéro virgule* *deux ça doit faire zéro virgule trente- cinq car* 37 *moins 2 =* 35 *!,* se disent François, Paul, Pierre et les autres.

En fait, ce sont les seuls yeux de ces élèves qui ont essayé de décoder « ces signes conventionnels » qui n'ont cependant pas été reçus 5 sur 5 .

**REMÈDE**

Les pages suivantes vont souligner que le « nombre décimal »
— comme la fraction — ne représente en réalité rien d'autre qu'un nombre on ne peut plus... naturel (sans jeu de mots). Son sens proviendra de sa découverte dans le réel qui nous entoure.

Sortons donc de l'école et allons chercher l'information là où elle se trouve : supermarchés, grands magasins, boucheries, etc. C'est là que nous découvrirons le nombre décimal dans son véritable contexte d'utilisation... fonctionnelle. L'enfant y rencontrera des « nombres à virgule », utilisés à bon escient.

**LES MASSES**

Osons perdre, ou plutôt, osons prendre le temps d'accompagner l'élève dans les grandes surfaces. Et/ou donnons-lui des consignes précises avant de l'y envoyer seul ou avec ses parents.

Préalable

C'est à dessein que les « masses » sont développées ici avant les « capacités » bien que celles-ci soient les plus concrètes de toutes les Grandeurs. L'intention est simple : grâce au tableau qui suit, l'enfant s'appropriera plus facilement les fameuses fractions particulières tant redoutées (0,375= $\frac{3}{8}$).

Première activité

- Faire relever une foule de « masses » figurant sur les emballages et les étiquettes des produits alimentaires et autres.
- Faire découvrir l'usage de deux codes différents pour la même masse et faire dire quel est leur « préféré » : deux cents grammes 200 g ou 0,200 kg ou0,2kg
- Faire découvrir que le code « 250 g » figure toujours sur l'emballage d'origine du produit : un paquet de beurre, une boîte de conserves, un fromage,... tandis que le code « 0,250 kg » figure, lui, sur l'étiquette de prix si le produit vendu provient d'une pièce plus grande : steak, dame de saumon, fromage.
- Faire vérifier, dans les deux cas, ce qu'affiche la balance digitale mise à la disposition des clients : « 0,252 kg ou 0,254 kg » et s'interroger sur les raisons de cet écart minime : la masse de l'emballage.
- Veiller aussi à rencontrer des produits dont la masse est indiquée sous forme de fraction (ils existent): $\frac{1}{2}$ k g - $1\frac{1}{2}$ kg - 1kg1/2
- Répéter plusieurs fois ces expériences.

Deuxième activité : une quadruple tâche individuelle ou avec la classe

- Faire relever la masse des différents paquets de beurre (et/ou demargarine) existants.
- Les faire peser sur place et noter le verdict de la balance.
- Faire rechercher un maximum de produits de même masse et en noter les différents codes : 500 g — 0,500 kg — 1/2 kg - 0,5 kg.
- Traiter l'information : établir le classement, par ordre de grandeur décroissant, en écrivant les différents codes qui figurent sur les paquets de tous les produits de même masse.

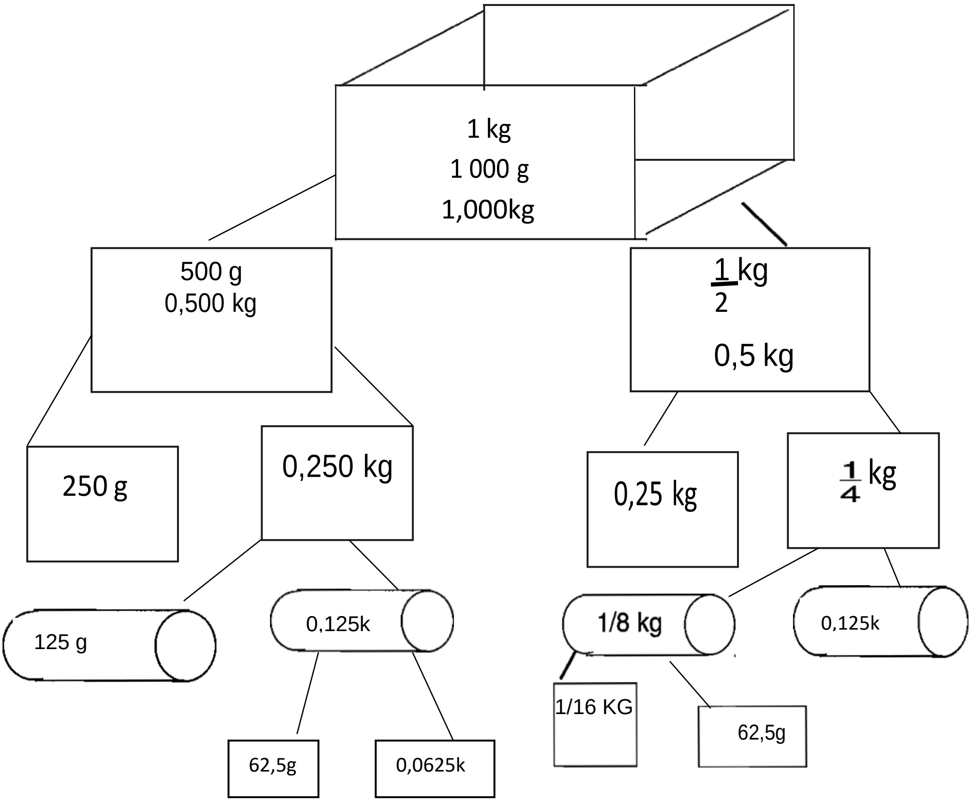
Troisième activité, en classe

- Communiquer et comparer les résultats des recherches.
- Écrire les différents codes rencontrés au tableau.
- « Combien de paquets de 500 g (250 g ou 125 g) faut-il pour faire un kilo ? »

## Quatrième activité : élaboration d'un document de référence

C'est à ce moment-ci que les soi-disant « pertes de temps » portent leurs fruits : les fameuses fractions particulières, qu'on assimile si mal, vont apparaître spontanément grâce au tableau ci-dessous. Il restera toujours disponible et chacun s'en servira aussi souvent, aussi longtemps qu'il le veut… jusqu'au moment où il n'aura plus besoin d'y avoir recours.

Évitons les mémorisations contraignantes et inutiles ! : « Pourquoi apprendre ce qui est dans les livres puisque cela y est » (S. Guitry). (paroles pleines de sagesse)




Et par extension :
2 paquets de 250 g font 500 g ou 0,500 kg ou 1/2 kg ;3 paquets de 250 g font 750 g ou 0,750 kg ou 3/4 kg ; 3 paquets de 125g g = 375 g = 0,375 kg = 3/8 kg ;
4 paquets de 125 g = 500 g = 4/8 kg = 2/4 kg = 1/2 kg ; 5 fois 125g = 625 g = 0,625 kg = 5/8 kg ; 7..., 8...
3 paquets de 62,5 g = 187,5 g = 0,1875 kg = $\frac{3}{16}$ kg
10 paquets... etc.

Cinquième activité

Trouvons d'autres fractions particulières à l'infini, en interrogeant d'autres paquets rencontrés (ou simulés). Il suffit de déplier un emballage de margarine (1 kg ou 500 g) pour y découvrir des tranches de 100 g.

Si 100 g = 0,100 kg = 0,1 kg = 1/10 kg

- Alors 200 g = ----------------------------- = 1/5 kg
  Alors 300 g = ----------------------------- = 3/10 kg
  Alors 400 g = ----------------------------- = 2/5 kg
- Alors 50 g = ----/150 g = ----350 g = ----/450 g = -----
- Alors 25 g = ----- /75 g = ----/225 g = ----
- Alors 20 g = ----120g = --------
- Alors 10 g = ------
- Alors 5 g = ----/85 g =
- Alors 1 g = 0,001 kg = 1/1000 kg.

Souhaits

Et que...

- naisse l'abaque des masses !
- ses colonnes soient tellement étroites qu'elles ne laissent la place que pour un seul chiffre !
- l'école ne soit jamais en rupture avec la vie : que le dag, l'hg, le quintal disparaissent ou se fassent tout petits !
- disparaissent les conversions scolaires dépourvues d'utilité !
- subsistent les véritables évidences : deux cents grammes s'écrivent200 g ou 0,200 kg (et parfois 0,2 kg) !
- les oreilles ne soient plus jamais écorchées !
  0,350 kg ne se lit pas zéro virgule trois cent cinquante kilo,
  0,350 kg se lit trois cent cinquante (déterminant) grammes (nom commun).
- vivent les zéros dits « inutiles » : 0,500 kg / 0,150 kg / 0,080 kg !

Des anecdotes vraies et amusantes

En décembre 1998, des octuplés ont vu le jour au Texas. Dans un journal on a pu lire la masse de ces bébés : « 0,62 kg — 0,73 kg, etc. » Dans un bus, un guide touristique lit l'article à ses 24 touristes attentifs : « ... le premier bébé pèse 62 grammes, le deuxième pèse 73 grammes, etc. » 23 des 24 touristes n'eurent aucune réaction...

Mieux encore ! Un automobiliste subit un éthylotest. Quelle stupeur quand le gendarme cramoisi lui hurle « Comment ?! Vous osez conduire avec un taux de zéro virgule trente-neuf alors que la tolérance est de zéro virgule cinq ! » Son supérieur lui a fait comprendre.

Exercices structurés

- Lire les masses sur des étiquettes et des tickets de caisse, y compris celles qui dépassent le kg.

- Lisons à haute voix ou écrivons en toutes lettres :0,458 kg / 0,450kg /
  (0,45 kg)
  0,600 kg / (0,6 kg)
  0,075 kg / 0,050 kg / (0,03 kg)
- Faire écrire :
  Neuf cents grammes → 0,... kg
  Nonante grammes → 0,... kg
  Neuf grammes → 0,... kg
  Douze grammes → 0,... kg
  Cent vingt grammes → 0,... kg

Ouvrons les yeux

En regardant certains emballages de plus près, on peut y apprendre des additions et des multiplications.

Exemple :

Telle marque de riz : 8 x 125 g → 1 kg
4 sachets individuels de 62,5 gr → 250 g.

**LES CAPACITÉS**

## Préalable

Pourquoi aborder d'abord les capacités et non les longueurs comme on en a l'habitude ? Parce que les capacités et les volumes sont les grandeurs concrètes par excellence.

1 l d'eau, 1 l de coca, 1 l de terre, 1 l de crème glacée occuperont toujours le même volume. Fait vérifiable à l'aide du litre gradué mais aussi avec le $dm^3$ (matériel hautement appréciable). Par opposition, le kg est fort variable du point de vue du volume : 1 kg de plomb ≠ 1 kg de plumes. D'autres grandeurs relèvent plus de « l'abstrait » : l'heure,...

<u>Activités préliminaires de longue haleine à mener avec les élèves</u> .(Donnons le temps au temps).

<u>Chercher de l'information</u>

- Toute l'école devra se mobiliser pour que son matériel didactique s'enrichisse d'une collection très variée de flacons, bouteilles, berlingots et autres récipients vides allant (par exemple) de la bouteille de2 l à l'échantillon de parfum. Ne pas oublier les produits d'entretien et les produits de beauté ; leur capacité s'exprime souvent en ml.
- Trier le tout dans des boîtes : celle qui portera l'étiquette « demi- litre » contiendra sept bouteilles (le rêve !), portant chacune un code différent : 1/2 l , 5dl, 50 cl ,500 ml , 0,5 l, 0,50 l 0,500l . D'autres boîtes comme le « litre » ne contiendront probablement que trois récipients : 1 l — 100 cl — 1000 ml.

  Ranger séparément les récipients affichant des cc.

  Au fur et à mesure de la récolte, vérifier à l'aide de l'« arbitre » (litre gradué et $dm^3$ gradué) si toutes les bouteilles d'une même boîte ont bien la même capacité (Un vrai plaisir pour les enfants). En même temps, lire (exprimer) les codes à haute voix : un demi-litre, cinq décilitres, cinquante centilitres, cinq cents millilitres.

  Donc :

  0,5 l ⟶ z~~éro virgu~~le... Mais bien <u>cinq</u>... Quoi ? cinq décilitres.

  0,50 l ⟶ z~~éro virgu~~le... Mais bien <u>cinquante.</u>.. Quoi ?

  0,500 l ⟶ z~~éro virgu~~le... Mais bien <u>cinq cents…</u> Quoi ? cinq cents millilitres.

- Présenter l'information en inventoriant les différentes boîtes et en construisant un tableau semblable à celui ci-après ; le demi-litre étant le plus « riche » occupera une place centrale et servira de « maître à penser ». Comme vous le verrez, ce tableau doit servir de base pour d'autres activités créatives ; gardons quelques cases vides.
- Laisser exprimer les nombreuses idées spontanées qui germent déjà pendant ces manipulations diverses. Exemple : cet élève de 9 ans : *Tiens, cette bouteille* (0,5l) *est plus grande que celle-ci* (0,25 l) *Donc, si ceci vaut « vingt-cinq », alors la première doit valoir « cinquante »*

| Berlingot 20 centilitres | canette limonade 25 centilitres | canette limonade 33 centilitres | petite bouteille de lait demi-litre | bouteille de vin 75 centilitres | le litre | un litre et demi | 2 litres | bouteille d'eau minérale 1 l et 25 centilitres |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/4 l | | 1/2 l | | 1 1 | 1 1/2 1 | 2 l | |
| 2 dl | | | 5 dl | | | | | |
| 20 cl | 25 cl | 33 cl | 50 cl | 75 cl | 100 Ol | 150 cl | | 125 cl |
| 200 ml | 250 ml | | 500 ml | 750 ml | 1000 ml | | | |
| 0,2 l | | | 0,5 l | | | 1,5 l | | |
| 0,20 l | 0,25 l | 0,33 l | 0,50 l | 0,75 l | | | | 1,25 l |
| | | | 0,5001 | | | | | |

| Produit laitier décilitre | cola 15 centilitres | After-shave 120 millilitres | Shampoo 400 millilitres | Cosmetique 125 millilitres | Lait concentré 10 millilitres | Margarine 350 millilitres | Glace 2litres et demi | Produit solaire 75 ml |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| 1 dl | | | | | | | | |
| | 15 cl | | | | | | | |
| 100 ml | | 120 ml | 400 ml | 125 ml | 10 ml | 350 ml | | 75 ml |
| | | | | | | | 2,51 | |
| | | | | | | | | |
| | | | | 0,125 l | | | | |

Créer — inventer (traiter l'information)

- Faire compléter toutes les cases vides : Imitons le « maître à penser », le demi-litre, et écrivons dans une autre couleur tous les codes théoriquement susceptibles d'exister (écrits en gras ici).
- Découvrons les cases qui resteront vides, qui ne peuvent tolérer aucun code à cet endroit et plaçons-y une croix.

  Exemples :

| Berlingot 20 centilitres | canette limonade 25 centilitres | canette limonade 33 centilitres | petite bouteille de lait demi-litre | bouteille de vin 75 centilitres | le litre | un litre et demi | 2 litres | bouteille d'au minérale 1 l et 25 centilitres |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/5 l | 1/4 l | | 1/2 1 | | 1 1 | 1 1/2 1 | 2 1 | 1 1/4 l |
| 2 dl | 2.5 dl | | 5 dl | | | 15 dl | | |
| 20 cl | 25 cl | 33 cl | 50 cl | 75 cl | 100 cl | 150 cl | | 125 cl |
| 200 ml | 250 ml | **333 ml** | 500 ml | 750 ml | 1000 ml | | | |
| 0,2 l | X | | 0,5 l | X | 1,0 l | 1,5 l | | |
| 0,20 l | 0,25 l | 0,33 l | 0,50 l | 0,75 l | | | | 1,25 l |
| | | | 0,5001 | | | | **2,000 l** | |

| Produit laitier décilitre | cola 15 centilitres | After-shave 120 millilitres | Shampoo 400 mlllilitres | Cosmetique 125 millilitres | Lait concentré 10 millilitres | Margarine 350 millilitres | Glace | Produit solaire |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **3/20l** | | | **1/8 l** | **1/100 l** | **7/20 l** | | |
| 1 dl | | **1,2 dl** | | **1,25 dl** | | | | |
| | 15 cl | | | | 1 cl | | **250cl** | **7,5 cl** |
| 100 ml | | 120 ml | 400 ml | 125 ml | 10 ml | 350 ml | | 75 ml |
| | X | | **0,4 l** | X | | | 2,5 l | |
| | **0,15 l** | | | | | | | |
| | | | | 0,125 l | | | | **0,075 l** |

Il serait impossible d'énumérer ici toutes les réactions des enfants, mais en travaillant comme nous venons de le faire, nous aurons la preuve que leurs « capacités » se seront accrues de nouvelles compétences.

À l'aide de notre collection, de notre tableau, de notre « arbitre », nous pourrons déjà poser une foule de questions orales (et par écrit : en toutes lettres) du genre :

Celle *bouteille (0,5 l)* et *celle-ci (0,25 l) remplissent ensemble quelle autre bouteille ?*
*Quelle* est *la différence entre cette bouteille (1/4 l) et celle-ci (20 cl*
*Comment s'appelle la bouteille qui contient le double de celle-ci (125 ml) ?*
*Comment s'appelle la bouteille qui vaut seulement le tiers de celle-ci (1,5 l) ?*
Combien de fois cette bouteille (2 l) contient-elle celle-ci (0,5 l) ?
*Cette* bouteille (1,25 l) comparée à celle-ci (0,25 l) la vaut combien de fois ?
*Cette bouteille (20 cl) comparée à celle-ci (1 l) en vaut quelle partie ? Etc.*

Remarques

- Faire formuler chaque réponse de toutes les façons (oralement et par écrit): 75cl – 3/4l —750 ml — 0,75 l - 0,750 l.
- En fonction des « récoltes », d'autres cas peuvent se présenter.

Vers la construction de l'abaque

Cette construction est devenue chose aisée après ces dernières activités.

- Expérimenter... et prendre conscience que 1 l d'eau, de lait, de coca, de terre... occupent toujours le même volume.
- Imaginer :

*Le litre de glace Fermette a revêtu un nouveau costume : la boîte cubique (1 $dm^3$) que voici! Nous allons démouler la glace et la découper en dix tranches...*

Et voilà que notre planchette ( jaune) symbolise 1 décilitre, que notre réglette (bleue) symbolise 1 centilitre et que le petit cube (rouge) symbolise 1 millilitre.

- Déposer sur la table, de gauche à droite :1 $dm^3$, 2 planchettes jaunes, 3 réglettes bleues, 4 cubes rouges.

Faire dire (lire) par les élèves (succès garanti à 9 ans) et écrire au tableau

en rouge : 1234 ml
en bleu : 123 cl et 4 ml
en jaune :12 dl et 34ml
en blanc : 1l et 234 ml

Demander à l'élève d'écrire autrement :

en rouge : 1234 ml
en bleu : 123,4 cl
en jaune : 12,34 dl
en blanc : 1,234l

- Sous quel code vient-on de traduire le mot ET ?
- Faire relire à haute voix. Et voilà que l'abaque vient de naître; il suffit de tracer les colonnes et de « baptiser » celles-ci : litre, décilitre, centilitre, millilitre.

| Litre (l) | décilitre (dl) | centilitre (cl) | millilitre (ml) | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | ml |
| 1 | 2 | 3, | 4 | cl |
| 1 | 2, | 3 | 4 | dl |
| 1, | 2 | 3 | 4 | l |

Extension de l'abaque : ne mentionner que des unités existantes : l'hectolitre et le décalitre n'ont plus d'existence dans la vie actuelle. (Il n'y a que dans le monde de la météo que l'on parle d'hectopascal). Le m³ ne viendra s'y ajouter qu'après l'étude des volumes. (cf. la facture de la Compagnie des Eaux).

L'essentiel

0,75 l : c'est ce que je vois.

Septante-cinq centilitres : c' est ce que je dois entendre .

**LES VOLUMES EN LIAISON AVEC LES CAPACITES**

Remarque préliminaire

Il semble normal de placer les volumes immédiatement après les capacités. Ce sont les deux seules grandeurs qui ont des rapports constants et fidèles entre elles. Et parfois MEME avec les masses quand il s'agit d'histoires d'eau.

Les volumes dans le réel qui nous entoure

- Les flacons dont la capacité est exprimée en cc, rencontrés lors de l'établissement de la collection de récipients auront probablement suscité la curiosité des enfants .
- Les dépliants publicitaires relatifs à l'automobile parlent de 1600cc. 1600 $cm^2$ , de 1,6 l pour le même moteur.
- La facture annuelle de l'eau parle de $m^3$.
- Les compteurs pour les grosses quantités d'eau « parlent » aussi de $m^3$ et de leurs curieux « rouages » indiquant : 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001.

Activités autours du compteur de l'école ou d'un immeuble à appartements

- Remplissons une bouteille d'un litre et aussi notre « arbitre » le $dm^3$ vérifions les modifications au compteur : quelles roues ont bougé ? Puis un seau de 10l, puis 10 seaux (100 l). Et si on laissait couler 1000 l … on aurait consommé un mètre cube (code $1m^3$).
- Si on transporte à l'automobile : que signifie alors « 1 600 $cm^3$» ? ou « 1600cc » ?
- Alors 1 l vaut… $cm^3$ ou… cc.

Structures

- Et voilà que notre « bonbon » rouge de première année et notre ml de glace deviennent $1cm^3$ (1cc).
- Voilà que notre « boîte de 1 000 bonbons » et notre litre de glace deviennent : $1dm^3$
- Et 1 000 $cm^3$ (1 000 « bonbons »), 1 000ml (100cl, 10dl, 1 l ) de glace deviennent $1dm^3$

- 100 $cm^3$, 1 dl (10 cl, 100 ml), 0,100 l de glace deviennent : 0,100 $dm^3$.
- Et voilà que « 0,1 $dm^3$ » devient 100 $cm^3$ et se lit cent centimètres cubes.

Voilà pourquoi il vaut mille fois mieux écrire :

100 $cm^3$ → 0,100 $dm^3$

10 $cm^3$ → 0,010 d $m^3$

1 $cm^3$ → 0,001 $dm^3$

**vive les zéros inutiles**

Et maintenant seulement l'abaque :

| $m^3$ | $dm^3$ | $cm^3$ | | | $mm^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0, | 1 | 0 | 0 | |
| | 0, | 0 | 1 | 0 | |
| | 0, | 0 | 0 | 1 | |

Structurons encore

De l'œil à l'oreille (de l'écrit à l'oral):

0,500 $m^3$ → cinq cents décimètres

0,070 $dm^3$ → septante centimètres cubes.

0,004 $dm^3$ → quatre centimètres cubes.

*De l'obscurité à la clarté (d'un écrit à un autre):*

*0,8 $m^3$ → 800 $dm^3$*

0,07 dm → 70 $cm^3$

0,007 $m^3$ → 7 $dm^3$

0,0005 $m^3$ → 500 $cm^3$

Relations entre les capacités et les volumes

Une nouvelle occasion :

-de manipuler( jouer dans l'eau) ;d'observer le compteur d'eau ; -d'utiliser le dm3 et ses acolytes :1l d'eau=1dm3=1kg

## Les longueurs

- Se créer des « idées » concrètes du mètre, du décimètre, du centimètre de 10 m, de 100 m.

- Avoir des repères précis : Ma taille, la longueur de mon banc, de la classe, de la cour, de ma chambre, d'un terrain de football, d'une piste de stade, du bassin de natation, d'un km (parcouru à pied !). ( un souvenir inoubliable ....1944)
- Faire observer comment les dimensions d'une voiture sont exprimées
- Faire observer le compteur kilométrique, les bornes le long de l'autoroute
- Faire interpréter les inscriptions sur les bornes : km 7... km 7,1.
- Faire construire l'abaque en entourant les étalons les plus fréquemment utilisés dans la vie : ne réserver qu'une toute petite place aux hectomètres et décamètres :

| Km | 100 m (hm) | 10 m (dam) | m | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

- Éviter ce type de codes : 7,1 km / 3,5 m.Privilégions ceux-ci: 7,100 km / 3,50 m.
- Lisons-les : sept km 100 m / 3 m 50 cm

## Les aires (mesures agraires, superficies)

- Avoir des référents permanents en classe : 1 m2 (géoplan, tableau) à partager en 100 $dm^2$

- Que signifie cette expression : « mesures agraires » ?
- Autour de nous, dans la vie quotidienne, où voit-on ces écritures : ha, a, ça ?
- Quand et où parle-t-on de superficie ?
- Lire les indications sur un pot de peinture.

NB Un géoplan est un tableau d’un mètre carré partagé en 100dm2 délimités par de petits clous qui permettent de « dessiner » des figures géométriques en un clin d’œil à l’aide de petits élastiques avec une petite boucle à chaque extrémité.

- Construire l'abaque, en écrivant les nombres :
  OUI à : 0,50$m^2$ (lecture : 50 $dm^2$) ; 0,80 ha (lecture 80a)
  NON : 0,5 $m^2$ / 0,8 ha. Nous sommes en base « 100 ».

Rencontrer de « nouvelles » grandeurs

C'est possible dans le champ de l'électricité, de la météo... ne fût-ce que pour multiplier les rencontres avec les préfixes : kilo — hecto - déca — centi — milli ; et pour comprendre la « survie » des hm, dam, dal, dg...dans certains manuels.

Une grandeur « hors du commun » : la durée

Elle offrira l'occasion de rencontrer d'autres bases que la base 10, mais d'une réelle utilité.

En plus, la manipulation et l'observation de la grande aiguille d'une horloge permettront de « voir » des fractions équivalentes, significatives pour la résolution de problèmes du type: temps —vitesse — distance.

30 mn ⟷ 1/2 h ⟷ 0,5 h
15 mn ⟷ 1/4 h ⟷ 0,25 h
45 mn ⟷ ........ ⟷ ........

Mais aussi :

20 mm ⟷ 1/3h
40 mm ⟷ 2/3h

3 mm ⟷ 1/20h ⟷ 0,05h
9 mm ⟷ 3/20h

4 mm ⟷ …….

10 mm ⟷ 1/6h
50 mm ⟷ …….

5 mm ⟷ 1/12h
25 mm ⟷ ……

7 mm ⟷ 7/60h

Un autre « costume » de la fraction décimale : le pourcentage

- Faire observer des graphiques : TV, presse, bulletin des élèves.
- Mettre l'accent sur l'utilisation du pourcentage dans la vie courante.
- Que signifient ces :

  50 % de réduction pendant les soldes ?

  25 % de ce graphique ?

  10 % de la population ?

  15 % des personnes interrogées dans ce sondage ?
- Prendre conscience que :

  – on parle toujours de 50 % / 25 % / 10 % DE…

  – un pourcentage de quelque chose exprime en réalité une partie, une fraction de cette chose. Il n'y a donc pas lieu de « dramatiser » le pourcentage : il s'agit d'une façon particulière d'écrire la fraction.

  – le pourcentage représente soit un opérateur : 25 % de 24 élèves→ 1/4 des élèves de la classe, soit un rapport entre deux nombres : 6 élèves par rapport à 24 élèves en représentent le quart ou 25 %.
- Acquérir le bon réflexe de la simplification :

  50 % de... = la moitié de...

  75 % de... = les 3 quarts de...

  et celui de la triple écriture :

  21 % de... = 21/100 de... = 0,21 de...
- Pratiquer ces conversions aller-retour :

40% de... = 40/100 de = 0,40 =2/5 de

37,5% de = $\frac{37.5}{100}$ = $\frac{375}{1000}$ = 0,375 = $\frac{3}{8}$ de

35% de = $\frac{35}{100}$ de = 0.35 de $\frac{7}{20}$ de.

**SYNTHESE DU CHAPITRE**

- L'expression « zéro virgule » est à bannir
- Soyons clair avec les aller-retour oral-écrit.

| Oral | Codes |
| --- | --- |
| cinq cents grammes | 500 g ou 0,500 kg (ou 0,5 kg) |
| huit cents centimètres cubes | 800 $cm^3$ |
| 60 centimètres | 60 cm ou 0,60 m (ou plus rarement 0,6 m) |

- Osons le premier pas vers l'abstraction :

**Si** 75 cm = 0,75 m = 3/4 m
et si 75 cl = 0,75 l = 3/4 l
et si 750 g = 0,750 kg = 3/4 kg
et si 75 $cm^2$ = 0,75 $dm^2$ = 3/4 $dm^2$
et si 750 $cm^3$ = 0,750 $dm^3$ = 3/4 $dm^3$
et si 75 a = 0,75 ha = 3/4 ha
et si 75 centimes = 0,75 € =3/4 €
**alors** (et alors seulement) l'élève comprendra, c'est-à-dire maîtrisera : 0,75 = 3/4.

*L'abstrait naît du concret!*

*L'esprit chemine du particulier vers le général.*

- Et un pas plus loin :

Faire rechercher les rares occasions où des nombres tels que 0,000 7 ou 0,000 015 se rencontrent :
Les masses: le petit sachet de riz de 62,5g deviendra parfois obligatoirement
0,0625 kg (nous rencontrerons ceci plus d'une fois dans le cadre des multiplications et des divisions) et 3 sachets feront 187,5 g ou 0,1875 kg.
Les mesures agraires : les affiches de notaires et les annonces de ventes notariales dans les journaux exprimeront l'aire exacte d'un terrain, soit ainsi : 1 ha 15 a 27 ca ; soit ainsi : 1,1527 ha.

Ne serait-ce pas seulement après avoir réconcilié l'école avec la vie qu'on pourra construire l'abaque complet et abstrait de la numération ?
CONCLUSION : Les Grandeurs d'abord et finir par la numération abstraite .

(mea culpa)

| Millions | | | l\Mlle | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | u | C | D | u | C | D | u | d | c | m | d-m* | c-m | mi |
| | | | | | | | | | | | | | | |

* Orthographe : dix-millièmes ou dixmillièmes

- **L'Euro**[19]

L'Euro est salutaire ! Il apporte incontestablement un plus dans la maîtrise des « nombres à virgule » grâce à la manipulation quotidienne des pièces de 1 à 50 centimes.

On y lit des nombres entiers qui sont « traduits » en nombres décimaux dans le commerce :

50 centimes → 0,50 €
5 centimes → 0,05 €
2 € et 30 centimes → 2.30 €

- Petits défis amusants à l'adresse du lecteur (et des 12 ans)

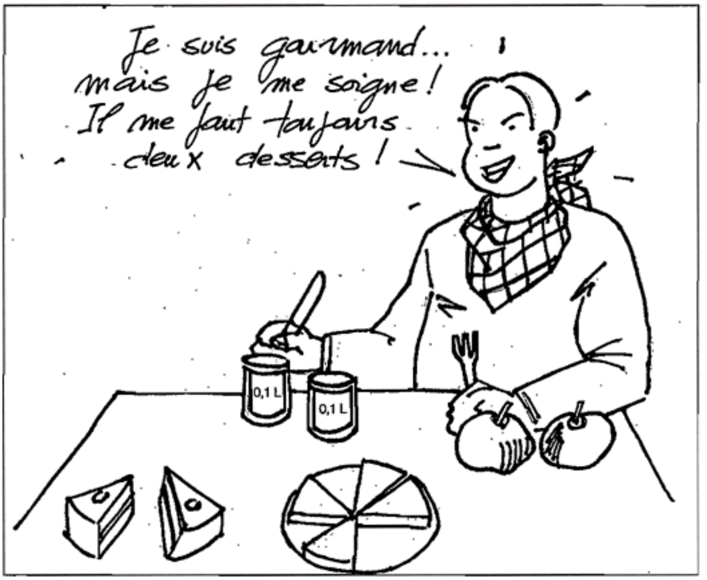
Orthographiez correctement en toutes lettres et en deux couleurs(déterminant – nom)

0,600 :…………………………………………………………..
0,000 06 : …………………………………………………
0,0600 : ………………………………………………

Écrivez de même en chiffres

sept cent-millièmes :………………………………………………………………
sept cents millièmes :……………………………………………
sept cent dix millièmes :…………………………………………
sept cent dix- millièmes :………………………………………

(une leçon de grammaire et une leçon de calcul)


Je suis gourmand...
mais je me soigne!
Il me faut toujours
deux desserts!
0,1 L
0,1 L


Les nombres :
2 est un nombre entier
$\frac{2}{6}$ est une fraction
6,2 est un nombre
décimal.

## III LES OPÉRATIONS

La mathématique trop souvent considérée comme un langage exclusivement écrit restera dépourvue de sens tant qu’on ne se fiera qu’à l'œil et qu'on continuera à « épeler » des signes.

### COMMENT DÉFINIR L´OPÉRATION ?

Comme c’est coutume, les sept opérations seront développées ici de façon linéaire en respectant un ordre bien défini, un ordre bien « classique » :

- l’addition
- les deux soustractions
- la multiplication
- les trois divisions

Cependant, pour le jeune enfant, il n’existe probablement aucun ordre de ce genre ; rappelons-nous les « prouesses » des tout-petits au chapitre du nombre entier. Pour lui, il y a des situations de vie (réelles ou simulées) à résoudre et il le fait sans même connaître le nom des opérations réalisées. Il fait des maths tous azimuts.

En somme, il agit ! Il mange cinq (des douze) bonbons auxquels il a droit... et constate qu'il en reste sept ; il partage les 52 bonbons avec ses copains ; il met les 24 gymnastes en rang ; il dessine une boîte de 15 biscuits carrés, etc.

Force est de constater que, ce faisant, il fait plus de soustractions et de divisions que d’additions et de multiplications.

Pourquoi, un jour, craindra-t-il précisément ces mêmes soustractions et divisions ? Si nous pouvions lui cacher tous ces mots « savants » (toutes ces étiquettes trompeuses), qui jettent le trouble bien souvent !

#### POUR MÉMOIRE (CF. OPTIONS FONDAMENTALES)

Pour chaque nouvelle opération, chaque nouvelle situation :

- priorité absolue à l'oral, dans un langage libre d'abord, plus structuré ensuite (savoir parler)

- résumer et rédiger le « compte-rendu » (savoir écrire)
- passer prudemment au codage : l'opération habillée
- retraduire le code en langage oral significatif
- faire des exercices structurés dans les deux sens (Trop longtemps on s'est limité à cette dernière étape à sens unique : « des colonnes de calcul qui n'ont ni queue ni tête... » [J. M. Dumont). Voilà la cause de l'incompréhension totale chez un grand nombre d'enfants et d'adultes et de l'insatisfaction même chez les meilleurs « techniciens ».)

Nous estimons donc que l'opération est à envisager comme la transcription, la traduction codée d'une solution afin de la communiquer à autrui dans ce langage écrit spécifique à la mathématique, sorte de « sténographie... universelle »

La définition de l'opération que nous défendons dans cet ouvrage est celle-ci :

*L'opération n'est rien d'autre que le souvenir compact, la*

*« photo », le sigle, la communication codée d'une solution et ce à l'aide exclusive des seules informations figurant dans la situation de départ, dans la question.*

Les exemples relatés ci-après au chapitre « L'œuf de Colomb » et aux chapitres consacrés à la multiplication et aux divisions viendront clarifier parfaitement cette définition. Plutôt que de s'acharner à vouloir acquérir des techniques et des automatismes, il s'agira davantage pour l'enfant d'apprendre à faire cette traduction codée au moyen de ces « signes conventionnels à sens bien défini... compris par les DEUX inter-locuteurs... et associés à la langue parlée ».[20] (G. Ifrach)

Vues sous cet angle, les opérations, même les plus mystérieuses, n'effrayeront plus guère les enfants. Certains finiront par en créer eux-mêmes (exemples au chapitre sur la « Division-Partage »).

## QUI SE RESSEMBLE... S'ASSEMBLE : L'ADDITION

### LE RÔLE DE L' ADDITION

Les situations réelles qui peuvent pousser le jeune enfant à faire des additions sont sans doute rares :

Pour faire l'inventaire d'une collection (de BD, d'images,....), il va compter ces objets un à un. Le jour où il voudra compléter sa collection il se remettra à les compter s'il a oublié le nombre initial .Il va vite se rendre compte de devoir faire des groupements et va sans doute créer sa propre « base ».

**PRENONS TOUT NOTRE TEMPS**

illustrons d'abord la progression vers l'usage du code après avoir vécu des situations concrètes.

- Priorité absolue à l'oral, dans un langage libre d'abord, plus structuré ensuite.

Langage libre : *J'avais déjà cinq petites voitures , je viens d'en recevoir deux; maintenant j'en ai sept.*

Première structuration : *Donc cinq voitures et encore deux voitures en plus cela fait en tout sept voitures.*

- Rédiger et résumer le compte-rendu :

  En toutes lettres : *Cinq voitures plus deux voitures ça fait sept voitures.*

  En abrégeant : *5 voitures plus 2 voitures ça fait 7 voitures.*

- Passer prudemment au codage : *5 voitures + 2 voitures = 7 voitures,* après avoir convenu avec les élèves des signes qu'on utilisera.
  Le signe « = » introduisant un résultat se lira « ça fait ». L'expression égale(nt) est peu courante dans la vie hors école. Pour preuve : Bon nombre d'enseignants demandent 7+ *5 ça fait combien ?* et exigent comme réponse : *7 + 5 égale 12.*
- De l'opération écrite à l'histoire : *inventons l'histoire de ce compte- rendu :7€+2€*

  DECOUVERTE DES PROPRIÉTÉS, SANS SUPPORT NUMÉRIQUE

- Petit clin d'œil :
  Imaginons un enfant de première année aidant son institutrice à déménager les livres de la bibliothèque et qui porte deux sacs : un grand

très lourd et un autre plus léger. Il peine, change ses sacs de main, pour finir par équilibrer.
Imaginons-le ensuite le soir à la maison, tout penaud, qui finit par confier à sa maman : *Madame a dit que je pratique déjà la commutativité* et *la compensation... mais je te jure que je n'ai rien fait , maman !*

- Par de multiples manipulations accompagnées d'explications orales, l'enfant <u>vivra</u> le concepts de commutativité, d'associativité et de compensation.

<u>Commutativité</u> : *Mon sac de billes passe de ma main gauche à ma main droite ; ma boîte de billes, elle, passe à gauche mais j'ai tourjours* autant *de billes.*
<u>Compensation</u> : *Une poignée de billes peut passer du sac vers la* boîte *et vice versa, j'aurai toujours la même chose .*

<u>Associativité</u> : *Les quelques billes que j'ai dans mon sac-banane peuvent rejoindre celles du sac ou de la boîte et j'aurai encore toujours* la même quantité de billes . Et on peut rassembler tout dans un seul sac.

**APPRENDRE EN JOUANT**

Le jeu de dés et le jeu de cartes « 21 » sont des occasions pour vivre le « passage » par la dizaine, les propriétés et les équivalences qui en résultent.

<u>Le jeu de dés</u>
Chaque enfant jette deux dés. Celui qui a le plus de points gagne un jeton. On exigera que les enfants utilisent le vocabulaire spécifique de l'addition : *J'ai cinq points <u>plus</u> trois points.*
Par ce jeu, les enfants seront amenés à vivre, en se débrouillant comme ils peuvent, le passage par la dizaine (5 + 6 et 6 + 6)
<u>Le « 21 » (cartes)</u>

But : arriver à un total de 21 points exactement.
Écarter les valets, dames et rois. Chaque enfant reçoit deux cartes et totalise ses points ;
il s'en contente ou réclame autant de cartes qu'il veut en espérant faire « 21 ».
Celui qui dépasse 21 est perdant ; celui qui s'approche le plus de 21 reçoit un jeton; un score de 21donne droit à 2 jetons.

Que de richesses à exploiter :

*8 points plus 6 points font... 14 points*

*10 points plus quatre points font 14 points aussi et c'est plus facile à calculer.* (compensation)

*7points plus 4 points plus 3 points font 14 points et(7points plus 3 points) plus 4 points aussi!* (associativité et commutativité)

**EXPLOITER LES PROPRIÉTÉS AU SERVICE DU CALCUL MENTAL À TRAVERS TOUS LES CYCLES**

La compensation

Le fameux « passage par la dizaine » est une application de la compensation, rencontrée dans les situations décrites plus haut. Le prérequis indispensable est bien entendu la connaissance des compléments de 10, 100, 1 000, procédé d'ailleurs utilisé par les petits commerçants rendant la monnaie.

La compensation servira à travers tous les cycles à transformer le « difficile » en « facile »

- Au premier cycle : (à l'aide de billes ou de bonbons par exemple) Dire : *Neuf bonbons plus cinq bonbons c'est la même chose que dix bonbons plus quatre bonbons et ça fait quatorze bonbons.*

Entre deux équivalences on traduira le signe « = » par c'est la même chose que

Écrire : *9 bonbons + 5 bonbons =* *« Le passage par la dizaine »*

*10 bonbons + 4 bonbons = 14 bonbons* *est une compensation croisée.*

Relire, redire : *Neuf bonbons plus...*

Plus tard on écrira toute l'opération sur une seule ligne.

- Ensuite, au fil du temps

39 € + 5 € = . .

39 € + 15 € = ..

99 € + 5 € = ...

99 € + 45 € = .. → 99 cm + 15 cm = ..

0,99€ + 0,15€ =

(nonante-neuf centimes plus...)

Et plus tard : 0,99+0,15

879 g + 157 g = ... ⟶ 0,879 kg + 0,157 kg =

(879 g plus 157 g...)

0,75 l + 0,50 l = ...

0,75 l + 0,5 l = ..

0,05 € + 0,20 € = ...

0,12 m + 0,80 m = .

0,12 m + 0,8 m = ...

0,12 + 0,8 =

La commutativité et l'associativité facilitent le calcul

Rappel : Si 7 points + 4 points + 3 points = (7 pts + 3 pts) +4 pts

Alors : 47 l + 25 l + 33 l = (47 l + 33 l) + 25 l

Alors : 1,25 l + 0,33 l + 0,75 l = 1,25 l + 0,75 l + 0,33l

en manipulant les bouteilles correspondantes !

Alors : 1,65 € + 0,45 € + 0,35€ =

(1,65€ + 0,35€)+0,45€=

**CALCUL MENTAL OU CALCUL ÉCRIT**

- C'est la prise de conscience que certaines additions deviennent trop laborieuses que le calcul écrit s'impose.
  Evidemment ,
- Dans d'autres circonstances, si on ne vise pas la maîtrise de ces techniques , tolérer l'usage de la calculette.

**L'ADDITION DES FRACITONS**

- C'est tout simple : si les dénominateurs sont communs, la seule lecture suffit.
  Si 4€ + 3€ = **7**€
  Alors 4 dl + 3 dl = 7 dl et 0,4 l + 0,3 l = 0,**7** l (et 4/7+3/7=7/7)
  (ce qui se lit de la même manière que le précédent, rappelons-le) Alors 4 douzièmes de tarte +3 douzièmes de tarte= **7** douzièmes de tarte.
  et alors 4/12 tarte + 3/12 tarte = **7**/12 tarte
- Et si les dénominateurs sont différents : coupons peu mais coupons bien.

Qui se .ressemble s'assemble : les pommes avec les pommes, les centilitres avec les centilitres, les quarts avec les quarts. Alors. ............. ?

## Premier cas : un quart de tarte plus une demi-tarte ?

En découpant, en dessinant, les enfants de 8 ans raconteront qu'en coupant la demi-tarte en deux on obtient deux quarts.

Dire

Un quart de tarte plus une demi-tarte c'est la même chose que un quart de tarte plus deux quarts de tarte et ça fait ...

Écrire

1 quart de tarte + 1 demi-tarte = 3 quarts de tarte

1/4 l + 1/2 l = 1/4 l + 2/4 l = 3/4 l

Et (bouteilles en mains):

0,5 l + 0,25 l = 0,50 l + 0,25 l = 0,75 l (50 cl + 25 cl = 75 cl).

Ce qui permettra vers 11 ans de passer à l'abstraction :

0,12 + 0,6 = 0,72 (voir chapitre « Zéro... pour zéro virgule »).

L'addition des fractions pourrait se limiter aux cas où un dénominateur est multiple de l'autre, mais on peut aussi relever le défi de se dépasser.

## Deuxième cas

Restons fidèles à notre slogan « Coupons peu mais coupons bien ! » et travaillons sur des cas comme : (les préférés des enfants !)

des quarts et des sixièmes → des douzièmes
des sixièmes et des huitièmes → vingt-quatrièmes /sixièmes
et des neuvièmes → dix-huitièmes / des
sixièmes et des dixièmes → trentièmes.
huitièmes et des douzièmes → vingt-quatrièmes.
des dixièmes et des douzièmes → soixantièmes. etc.

C'est dans ces cas-là que réside le vrai plaisir d'un bon travail : une réflexion bien menée.
C'est ainsi que l'on constate que les enfants maîtrisent le PPCM de deux nombres avant même d'en avoir entendu parler.

(les activités préférées des enfants .....car ils sont obligés de réfléchir)

Exemple-type : 1/6 tarte + 1/4 tarte =

- Faire des hypothèses
- Découper, dessiner, observer.
- Conclure : Il faut couper le sixième en deux ; il faut couper le quart en trois. Nous aurons deux douzièmes et trois douzièmes
- Écrire : 1/6 tarte +1/4 tarte = 2/12 tarte +3/12

Troisième cas : Quand on est obligé de « faire des miettes »

Que faire avec... ? Comment couper... ?

- des demis et des cinquièmes ?
- des cinquièmes et des septièmes, ?
- des septièmes et des neuvièmes ?
- etc.

Les enfants du fondamental finiront pas découvrir « un truc » grâce auquel l'enseignant du secondaire pourrait les mener vers la compréhension et la maîtrise de ces lois (inédites) du monde de l'algèbre :

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay}{by} + \frac{bx}{by} = \frac{ay+bx}{by}$$

**ON NE SOUSTRAIT PAS TOUJOURS**
**DANS LA SOUSTRACTION**

**UN SEUL VISAGE POUR UN DOUBLE RÔLE**

- Faute d'un signe spécifique, il n'est pas possible face à l'opération abstraite : 7 - 5 = 2 ni même face à l'opération habillée : 7 € -5 € = 2€ de distinguer, d'évoquer le problème dont ces opérations sont issues et dont elles sont l'issue. Et pourtant, il y a bien deux cas : le reste et la **différence**.
  - On fera vivre et raconter des situations concrètes avant de les coder. Le récit 1 : *J'avais 7 bonbons, j'en ai mangé deux; il ne m'en reste plus que cinq.*

Écrire ce récit en toutes lettres au tableau noir. CONVENIR

d'un mode d'économie : *7 bonbons - 2 bonbons = 5 bonbons.*

Le récit 2 *: Jean a sept bonbons, Guy n'en a que deux; Jean a 5 bonbons de plus.*

Verbaliser autrement : *Entre les 7 bonbons (de Jean) et les 2 bonbons (de Guy) il y a une différence de 5 bonbons.*

Écrire en toutes lettres au tableau. Convenir de ce mode, de ce code économique :

*7bonbons - 2 bonbons = 5 bonbons*

- Plus tard, on invitera les élèves à inventer deux situations différentes pour: 9€ -3€=6€ ( reste, puis différence)
- L'enseignant jugera de l'utilité d'approfondir les deux cas en même temps ou non. Remarquons cependant que la soustraction « reste » est plus vivante que l'autre : il y a de l'action, du mouvement ; la soustraction « différence » est statique : on observe un écart ; on ne soustrait pas, on n'enlève rien.

## LA SOUSTRACTION « RESTE»

Le passage par la dizaine

On fera vivre aux enfants des situations qui seront d'abord racontées , puis écrites en toutes lettres avant d'être codées comme ci-après.

P : *Voici 14 bonbons; combien peut-on en manger sans ouvrir le paquet de dix*

E : *Un ou deux ou trois ou quatre.*

P : *Et si je t'offre 6 bonbons, comment fais-tu ?*

E n°1 : *Je mange d'abord les 4 bonbons et puis j'en prends encore deux dans le paquet de 10... il en reste huit.*

E n°2 : *J'ouvre le paquet et j'en mange six; il en reste 4 et avec les 4 « vieux» il en reste 8 en tout.*

Les deux voies spontanément utilisées par les enfants :

- On constate que E n° 1 pratique la compensation parallèle :Code :
  14 b - 6 b = 10 b - 2 b = 8 b

On remarque bien ici la justesse de notre définition d'une opération :une trace finale

Le complément d'un nombre : de 88 € à 100 €

- Le récit : *J'ai 123 € en poche (un billet de 100 € et...). J'achète cette boîte de jeu à 88€ . Que me reste-t-il ? Pourrais-je encore acheter ce double album à 40 € ?*
- *Le vécu : Je paye avec mon billet de 100 €, je garde les 23 €, on me remet 12 €; il me reste 35 €. Je n'ai plus assez pour l'hebdo !*
- La synthèse écrite :

| J'ai | Je dépense | , donc je garde | et je reçois | il me RESTE. |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 123 € | — 88 € | = 23 € | + 12 € | = 35 € |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 123 | — 88 | = 23 | + 12 | = 35 |

Imaginer des situation

N'oublions pas de faire imaginer des situations au départ de leur traduction mathématique. L'expérience a montré combien les enfants adorent imaginer et raconter ce genre d'histoires avec force détails à l'appui. N'est-ce pas l'essentiel ? N'est-ce pas plus riche et plus passionnant que des colonnes de calculs ?

| | | |
|---|---|---|
| 523 € - 478 € = 23 € + ….. | 1235€ - 796€=… | 11430 € - 8 888€ = … |
| 714€ – 386€ =… | 2103€. .-1895€= | |
| Etc. | etc. | |
| | 1230€ - 845,50€ | |
| | etc. | |

*Et aussi: 123 cm - 88 cm = (c'est comme 123 € - 88 €!)*

*et :* *1,23 m - 0,88 m =*

1,23 m - 0,90 m =

*1,23 m - 0,9 m =*

et... 1,23 - 0,9 =

La soustraction « Reste » des fractions ?

La soustraction des fractions a davantage de sens dans le cadre de la recherche d'une différence (forme de comparaison). On se limitera donc essentiellement aux « histoires » correspondant à ces « photos-synthèses » :

5/6 tarte -1/6 tarte = et 0,5 l - 0,1 l =

**1/2 tarte – 1/4 t=** **et 0,5 l - 0,25 l =**

Puis:

0,48 m - 0,36 m | 0,500 kg - 0,150 kg | 0,20 € - 0,15 €

0,48 m - 0,30 m | 0,5 kg -0,15 kg | 0,2 - 0,15

0,48 m - 0,3 m | 0,5 - 0,15

0,48 - 0,3 = 0,18 car 48/100 - 3/10 = 48/100 - 30/100 = 18/100

Approche prudente du nombre négatif à l'aide de

- extraits de compte bancaire :
  500 € - 700 € = - 200 €

- la météo :
  Aujourd'hui, il fait + 5º ; on prévoit une baisse de 7º ;
  il fera - 2º ⟶ code : 5º - 7º = -2º.
  Plus tard ! 5 - 7 = - 2
- l'ascenseur :
  du niveau 3, je descends de 4 étages ; j'arriverai au -1.

Calcul écrit

Qu'il s'agisse d'un reste ou d'une différence, la technique de « l'emprunt » nous semble plus indiquée que la compensation car plus proche de la vie. (Mettons-nous d'accord au sein d'une même école !)

127,75€ - 85,50€ =

$$\begin{array}{r} 127{,}75 \\ -\ 85{,}50 \\ \hline ?\ 2{,}25 \end{array}$$

N'ayant que 2 billets de 10€ , il me faut changer le billet de100€ ; j'aurai 12 billets de 10 € et j'en enlèverai huit...reste 4

**LA SOUSTRACTION « DIFFÉRENCE »**

Cette soustraction est une forme de comparaison.
(Tout le monde en fait tous les jours mais ignore son nom ;
Un groupe d'enseignants a mis plusieurs minutes pour s'en rendre compte !!!)

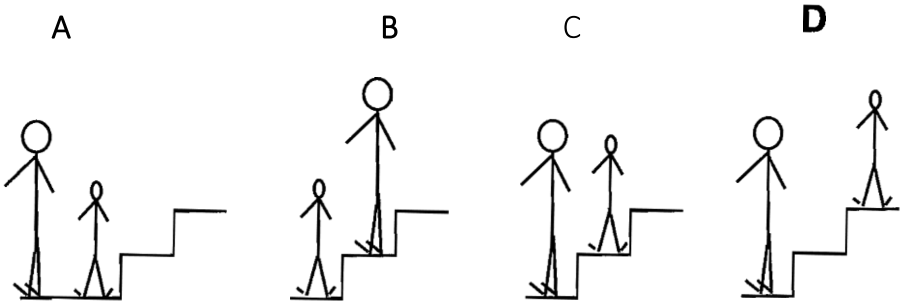
Retrouvons la compensation parallèle sans support numérique

- Une première approche (invisible mais très évidente)
  Aujourd'hui, il y a une certaine différence entre l'âge de l'institutrice et l'âge de ses élèves. Comment était cette différence il y a deux ans ?

Il y a quatre ans ? Comment sera-t-elle dans 5 ans ? Dans 7 ans ?

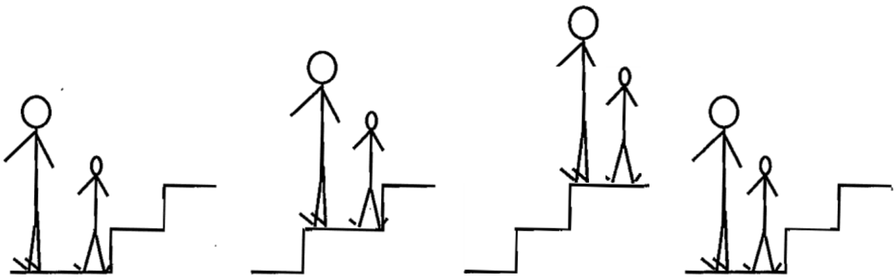
- Une deuxième approche bien visible

<u>Première séquence à vivre sur les marches d'un escalier</u>




Faire observer et commenter l'écart (la différence) entre les deux personnages

<u>Deuxième séquence à vivre sur les marches d'un escalier</u>



Faire observer et commenter l'écart (la différence) entre les deux personnages.

<u>Exploitaton optimale de la compensation en continuité à travers les cycles</u>

- Premier stade : les deux termes de la soustraction sont inconnus. Faites vivre la situation avec deux sacs de billes (celui de Mathilde et de Jean).
  *Jean a six billes de plus que Mathilde.*
  Prévoir ce qui se passera si on donne en plus :
  *1 bille à Mathilde seule ou 1 bille à Jean seul ou 1 bille à chacun.*
  Que devient cette différence si on enlève :
  *2 billes à Mathilde ou 2 billes à Jean ou 2 billes à chacun.*
- Deuxième stade : les deux termes sont connus.
  *Jean a 13 billes et Mathilde en a 8.*

  Qui en a le plus ? Quelle est la différence entre les deux sacs ?

Écrire : *13 billes - 8 billes = ? billes*

Comment pourrait-on se faciliter la vie, calculer plus aisément ?

Écouter les propositions des élèves et relever celles-ci :

*On peut offrir 2 billes à chacun ,' Jean en aura 15 et Mathilde 10.*

*La différence saute aux yeux !*

*On enlève 3 billes à chacun : Jean n'en a plus que 10, et Mathilde n'en a plus que 5.*

13 b - 8 b = → 15 b - 10 b = 5 b

13 b - 8 b = → 10 b - 5 b = 5 b

- S'habituer au langage

  *La différence entre 13 billes et 8 billes est la même que celle entre 15 billes et 10 billes ou celle entre 10 billes et5 billes, c'est-à-dire 5 billes de différence.*

Associer l'écriture à la parole :

13 b - 8 b = 15 b - 10 b = 5 b

13 b - 8 b = 10 b - 5 b = 5 b

- Au départ, les enfants éprouvent des difficultés avec cette « association». Acceptons momentanément 13b - 8b = 5b. Idem pour l'addition : 9b + 6b = 15b. (mais exigeons le récit)
- Assurons une continuité à travers les cycles

  Ainsi, la différence entre le prix de ce pantalon (123 EUR) et le prix de celui-ci (88 EUR) restera la même si les deux articles augmentent de 12 EUR.

D'où : 123€ - 88 € = 135 € - 100 € = 35 € (facile !)

Mais dans certains cas, d'aucuns préféreront arrondir le premier terme

103 € - 77 € = 100 € - 74 € = 26 € Et vive la liberté du choix :

103€ - 77 € = 126 € - 100 € = 26 €

- Structurons (toujours dans les 2 sens : histoire → opération)

523 € - 478 € =

702 € - 643 € =

314 € - 279 € =

545 € - 500 €

700 € - 641 €

.....

etc.
1235 € - 796 €

2103 € - 1967 €
etc.

1235 € - 867,50 €

etc.

11 430 € - 8 888 €
etc.

- Puis, vers des « codes » plus mystérieux :

La différence de taille entre cette fille de 123 cm et ce garçon de98 cm sera la même que...
123 cm - 98 cm = 125 cm - 100 cm ( 8 ans)
1,23 m - 0,98 m = ...
Et entre ces 2 paquets de viande ?1235 g - 897 g =
1,235 kg - 0,897 kg

Quid de la « soustraction-différence » des fractions ?

La recherche d'une différence étant une forme de comparaison (véritable richesse mathématique !), la « soustraction-différence » des fractions aura davantage de sens que l'addition. La soustraction pourrait dès lors très bien précéder l'addition. Les enfants n'y verront aucune objection.

Quel que soit le choix de l'enseignant, la progression dans les différents cas sera la même :

**Si** 7 € - 3 €= 4 € de différence (nombre entier)

**alors** 7 dl - 3 dl = 4 dl et 0,7 l - 0,3 l= 0,4 l de différence (nombre décimal)

**et alors** 7 huitièmes de tarte - 3 huitièmes de tarte = 4 huitièmes t. différence (fractions)

et 7/8 tarte - 3/8 tarte = 4/8 tarte de différence.

En un second temps on verra des cas « plus complexes » complexes » '

1/2 tarte - 1/4 tarte = ? (Je coupe la demi-tarte en 2.)

0,5 l - 0,25 l = ? (bouteilles en mains)

Et bien plus tard : 0,87 - 0,4

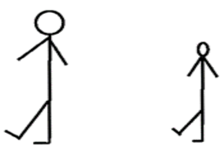
Rappelons ici la remarque, pleine de logique, donnée par un enfant de 9 ans rencontrant pour la première fois ces codes inconnus. *Tiens, cette bouteille (0,5l) est plus grande que celle-ci (0,25l) : alors, si celle- ci vaut « vingt-cinq », l'autre doit valoir « cinquante ».*

Pour la soustraction de fractions avec des dénominateurs différents , il faudra prévoir la même progression que pour l'addition (cf. chapitre précédent).

Nouvelle approche du nombre négatif

- **Faisons observer, commenter (avec 2 élèves de la classe).**

130 cm 110 cm 110 cm 130 cm



Puis

Naïma Luc Luc Naïma

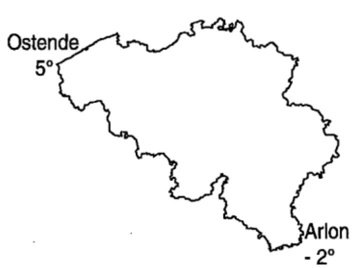
Ne pourrait-on pas dire que la soustraction est aussi commutative ?

Il y a toujours un écart (une différence) de 20 cm entre Naïma et Luc. En parlant de Naïma on dira qu'elle a 20 cm de plus que Luc, tandis que dans l'autre cas, on dira que Luc a 20 cm de moins que Naïma. Ce qui donnera en « code » : 130 cm -110 cm = 20 cm (premier cas)

110 cm -130 cm = -20 cm (second cas).

- L'œuf de Colomb ou « Moins... moins... ça fait plus » : Voilà une vérité

mathématique que personne n'a oubliée... tant elle paraissait invraisemblable. Comme le dit Marco Wolfs « Ne cherche pas à comprendre, c'est de la logique ! » Bien sûr, c'est logique, pardi ! Il suffit d'observer la carte ci-dessous et tout le monde vous dira qu'à Ostende il




y a 7° de plus qu'à Arlon.

Reste à traduire :

$5^o$ - $2^o$ = $3^o$ mais $5^o$ - (- $2^o$) = $7^o$

$5^o$ - - $2^o$ = $7^o$

Et enfin 5 - - 2 = 7

ET cet inspecteur de math en secondaire siffla . . . !?

MAIS ,à force de pousser sur tous les boutons du 5 au -2, ce gamin de 5 ans sait très bien qu'il y a 7 étages entre le niveau 5 et le niveau -2 5- -2=7

« Aussi bizarre qu'étrange ».

« OU AVAIS-JE LES YEUX ? » (Adamo )

RACONTONS d'autres cas semblables.

Ex. -3 - -7 = 4 etc

## LA MULTIPLICATION OU LA « MULTI - IM - PLICATION

QU'EST-CE QUE « MULTIPI.IER » '?

1re invitation

Prière de rédiger brièvement « VOTRE » définition de la multiplication... telle que transmise à vos élèves bien souvent.

2e invitation

Prière de contrôler rapidement le ticket de vos dépenses chez le traiteur.

Traiteur
02/03/02

| Kg | €/kg | € |
|---|---|---|
| Filet pur | | |
| 2,000 | 23,00 | 46,00 |
| Ris de veau | | |
| 0,750 | 32,00 | 24,00 |
| Foie gras | | |
| 0,150 | 66,00 | 9,90 |
| Pâté aux truffes | | |

Vous voilà rassuré quant à l'exactitude de votre compte...mais probablement beaucoup moins quant à l'exactitude de « votre » définition de la multiplication.

Reprenons rapidement vos pensées, votre raisonnement mental.

Filet pur: 2 fois 23 € ça fait 46 €.
Ris de veau : les trois quarts de 32 € ça fait 24 €.
Foie gras: 6,60 € pour 100 g et 3,30 € pour 50 g ; ça fait 9,90 €.
Pâté : 1 fois 48 € plus le quart de 48 € (12 €), ça fait 60 €.

Traduisons vos pensées par des opérations habillées.

Voici celles que nous prônons, et qui reflètent bien la pensée :
2x23€ = 46€ (nouveau depuis 1965 . Ça commence à bouger !)
0,750x32€ = 24€
(certes, on pense à ¾ de 32€ mais pour rester fidèle à notre définition de l'opération, il faut retrouver sur la « photo »les informations figurant dans la situation initiale.) L'utilisation judicieuse et le sens élargi du signe x seront clarifiés aux pages suivantes.
0,150 x 66€ = 9,90€
1,250 x 48€ = 60 €

Traduisons par des opérations abstraites.

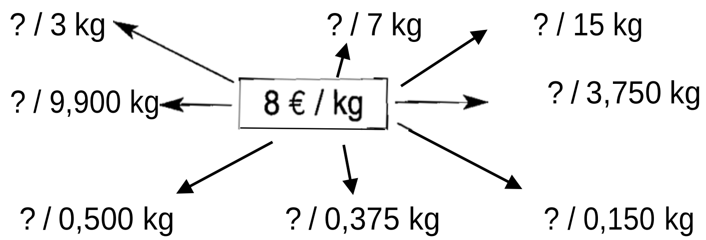
Le code le plus économique (mais le plus « mystérieux »)
2 x 23 = 46
0,75 x 32 = 24
0,15 x 66 = 9,9
1,25 x 48 = 60

Complétons la définition de la multiplication.

Multiplier : c'est donc prendre (chercher) un multiple d'un nombre (le double de...), une fraction d'un nombre (les trois quarts de...), une combinaison des deux (un multiple et une fraction d'un nombre).

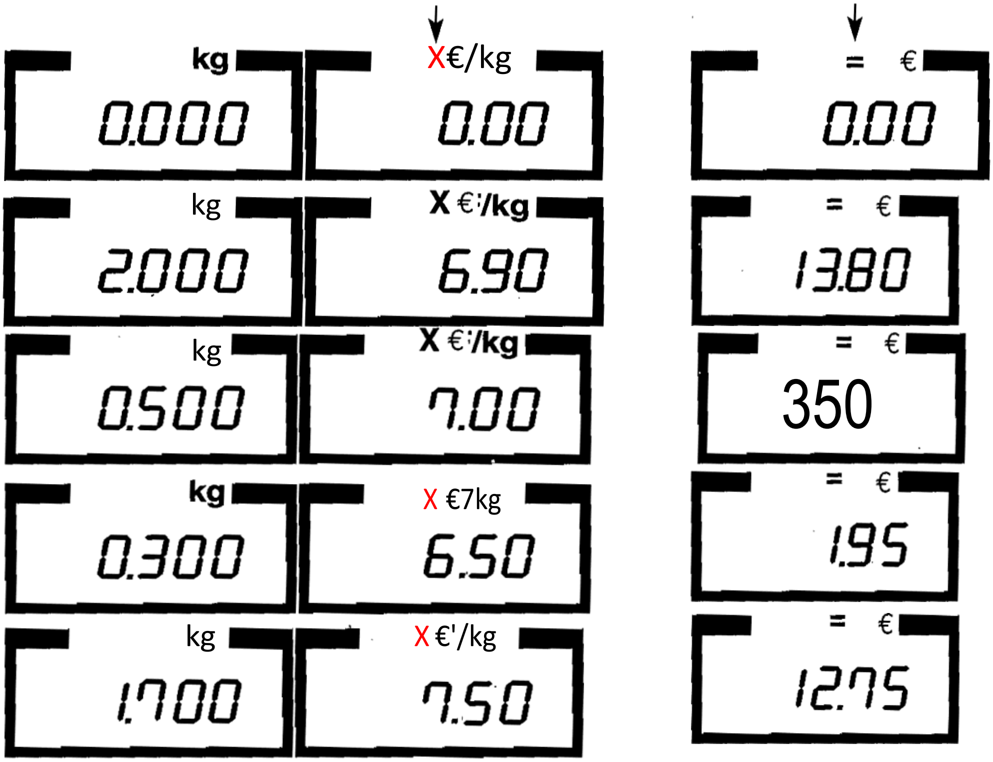
Multiplier implique donc ce triple aspect : partir d'une valeur unitaire connue (€/kg, km/h, €/l...) vers une valeur supérieure (2 kg, 5 l...) ou une valeur inférieure (750 g, 1/2 l...) ou les deux à la fois (2,250kg...)

Traduction sans paroles de la définition




Approbation de notre définition par l'environnement

Certaines balances digitales « poids-prix » mettent clairement en évidence ces différentes écritures ; elles affichent clairement la « couleur ».




- Constats

  L'étroitesse de la définition de la « multiplication » chez beaucoup est la cause d'incompréhension. Cette incompréhension se formule généralement comme suit : *Je multiplie et mon résultat est plus petit que* le *nombre initial!*

*Maintenant on le sait :La Multiplication rend SOUVENT PLUS PETIT , beaucoup plus souvent .(p114)*

On s'est trop souvent limité à l'entraînement excessif de la mémoire en calcul mental : *Pour multiplier un nombre par 0,25, il faut...*

On a dépensé trop d'énergie à la maîtrise ( ? !) des techniques opératoires du calcul écrit.

- mise en garde :

  Méfions-nous, dès lors, chez les petits, de toute définition incomplète momentanée . Cette prudence est évidemment de mise dans d'autres domaines, comme la grammaire. Exemple :

  La notion de sujet d'une phrase est un exemple frappant de ces définitions provisoires qui figent les idées. Dans les classes , on donne souvent aux élèves la définition suivante : *Le sujet, c'est celui qui fait l'action.* Définition dangereuse ancrée dans les esprits.

  *Michel, lève-toi !*
  *La façade a été repeinte.*
  *Il semble fatigué.*
  *Il faut davantage d'ouverture d'esprit.*

NOUVELLE MISE EN SITUATION DU LECTEUR

Cette mise en situation permettra de renforcer la prise de conscience du triple aspect de la multiplication. A 10_12 ans ce genre d'activité a déjà eu, à maintes reprises, un franc succès chez des enfants de tout milieu socio-culturel !

1. Histoire sans paroles


| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | 2,000 | 40,00 | |
| 2) | 5,000 | 40,00 | ................ |
| 3) | 7,000 | 40,00 | ................ |
| 4) | 10,000 | 40,00 | ................ |
| | | | ................ |

| | | |
|---|---|---|
| 5) | 11,000 | 40,00 |
| 6) | 9,000 | 40,00 |
| 7) | 15,000 | 40,00 |
| 8) | 17,000 | 40,00 |
| 9) | 0,500 | 40,00 |
| 10) | 0,250 | 40,00 |
| 11) | 0,750 | 40,00 |
| 12) | 0,125 | 40,00 |
| 13) | 0,625 | 40,00 |
| 14) | 0,100 | 40,00 |
| 15) | 0,700 | 40,00 |
| 16) | 0,200 | 40,00 |
| 17) | 2,750 | 40,00 |
| 18) | 3,375 | 40,00 |
| 19) | 10,500 | 40,00 |
| 20) | 9,875 | 40,00 |

Vous avez complété les 20 prix ? L'essentiel est fait : traiter les informations reçues ! Mission accomplie !

2. Communiquer et justifier le raisonnement oralement

Quelques exemples :

2) 5 kg à 40 €/kg coûtent 200 € parce que 5 fois 40 € ça fait 200 €.

8 ) 17 kg à 40 € /kg coûtent 680 € parce que 10 fois 40 plus 7 fois 40 € (280 €) ça fait 680 €.

9) 500 g à 40 €/kg coûtent 20 € parce que la moitié de 40 € ça fait 20€

17) 2 kg 750 à 40 €/kg coûtent 110 € parce que 2 fois 40 € (80 €) plus les 3 quarts de 40 €(30 €) ça fait 110 €.

20) 9,875 kg à 40 €/kg coûtent 395€ parce que 10 fois 40 € (400 €) moins 1 huitième de 40€ (5 €) ça fait 395€ (prérequis oblige)

Analyse :

Au cours de cette phase, dans les séries

- 1 à 4 : la lecture suffit,

– 5 à 8 : utilisation de la distributivité du multiplicateur,

– 9 à 16 : prendre une fraction de …

– 17 à 20 : prendre un multiple et une fraction de 40 € en faisant usage de la distributivité où la virgule traduit le mot PLUS.

3. Communication codée avec justification éventuelle

Quelques exemples :

3) 7 x 40 € = 280 €
5) 11 x 40 € = 400 € + 40 € = 440 €
13) 0,625 x 40 € (= 5/8 de 40 €) = 25 €
17) 2,750 x 40 € = 80 € + 30 € = 110 €
20) 9,875 x 40 € = 400 € - 5 € = 395 €

4. Le raccourci absolu, la « sténographie »

C'est l'opération abstraite, celle faite à la calculette (du chinois, l'horreur, comme disent les enfants): 2,75 x 40 = 110. Ce codage de l'opération, hors de tout contexte, était ce qui jadis posait justement problème aux enfants.

Désormais on n'entendra plus, dans les classes, « épeler » de la sorte :

*0,625 x 40 (ex. 13)*

*zéro virgule six cent vingt-cinq fois quarante*

*3,375 x 40 (ex. 18)*

*3 unités 375 millièmes fois 40*

Voici comment se présenterait le tableau noir en classe :

| Phase 1 | Phase 2 | Phase 3 | Phase 4 |
|---|---|---|---|
| Histoires à résoudre | Je « raconte » et j'écris en toutes lettres | Opération habillée (codage mathématique sensé) | Opération abstraire (calculette) |

La commutativité

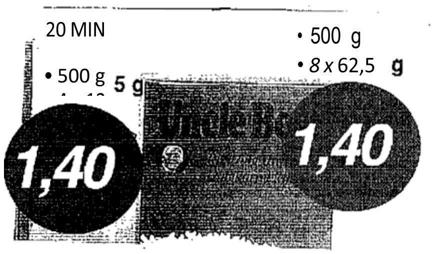

La compensation (croisée)


double concentré

de tomates

2 X 140 g

ou 4 X 70 g




L'associativité

La distributivité

| Boucherie | | | |
|---|---|---|---|
| 02/03/02 | | | |
| kg | €/kg | € | |
| Divers | | | |
| 0, 550 | 13, 00 | 7,15 | → 6,50 € + 0,65 € |
| Filet pur | | | |
| 0, 150 | 26, 00 | 3, 90 | → 2,60 € + 1,30 € |

**APPROFONDISSONS LES PROPRIÉTÉS ET LES TECHNIQUES**

Ce sont de véritables richesses au service de la multiplication.

Comment vérifier, en un coup d'œil, l'exactitude de tous ces prix ?

(Réalisable aussi au cycle 10-12.)

Parler.. c'est gagner (si on a le bon réflexe de simplifier)

| Boucherie | | | |
|---|---|---|---|
| 02/03/02 | | | |
| kg | €/kg | € | |
| Divers | | | |
| 0,500 | 22,00 | 11,00 | → la moitié de 22 € |
| Divers | | | |
| 0, 250 | 26, 00 | 6, 50 | → 1 quart de... |
| Divers | | | |
| 0,100 | 26, 00 | 2, 60 | → 1... |
| Divers | | | |
| 0, 200 | 15, 00 | 3, 00 | → 1... |
| Divers | | | |
| 0, 300 | 20, 00 | 6, 00 | → 3... |

La compensation croisée et ses bienfaits

| Traiteur | | | |
|---|---|---|---|
| 02/03/02 | | | |
| **Kg** | **€/kg** | **€** | |
| Divers | | | |
| 0,130 | 30,00 | 3,9 | → 13 x 0,3€ |
| Filet pur | | | |
| 0,90 | 30,00 | 2,7 | → 9 x 3€ |
| Divers | | | |
| 0,050 | 57,00 | 2,85 | → la moitié de 5,7€ |

La compensation croisée associée à la commutativité

| Traiteur | | | |
|---|---|---|---|
| 02 / 03/ 02 | | | |
| Kg | €/kg | € | |
| Divers | | | |
| 0, 272 | 50, 00 | 13 , 60 | → 0,500 x 27,20 € (la moitié de 27,20 €) |
| Divers | | | |
| 0,158 | 50,00 | 7,90 | |
| Divers | | | |
| 0,106 | 50,00 | 5,30 | |
| Divers | | | |
| 0,182 | 25,00 | 4,55 | |
| Divers | | | |
| 0,270 | 20,00 | 5,40 | → 0,200 x 27,00 € (un cinquième...) |
| Divers | | | |
| 0,170 | 20,00 | 3,40 | |
| Divers | | | |
| 0, 16 0 | 20, 00 | 3, 20 | |

La distributivité

| | | | |
|---|---|---|---|
| Traiteur | | | |
| 02/03/02 | | | |
| **kg** | **€/kg** | **€** | |
| 0,550 | 13 | 7,15 | 6,50 € + 0, 65 € |
| DiVERS | | | |
| 0,150 | 26 | 3,90 | .... |
| Divers | | | |
| 0, 102 | 50, 00 | 5, 10 | .... |
| Divers | | | |
| 0,160 | 20,00 | 3,20 | .... |
| Divers | | | |
| 1, 005 | 20, 00 | 20, 10 | 20 € + 0,10€ (0,10 € pour 5 g c'est-à-dire) $\frac{1}{200}$Kg |

Et vive la liberté d'action

| | | | |
|---|---|---|---|
| Boucherie | | | |
| 02/ 03/ 02 | | | |
| **Kg** | **€/kg** | **€** | |
| Divers | | | |
| 0, 160 | 20, 00 | 3, 20 | = 16x 0,20€ (compensation)<br>= 2,00€ (100g) + 1,20€ (3/50kg) (distributivité)<br>= 0,200 x 16,00 €=1/5 de 16€ (commutativité et compensation) |

Voilà de belles richesses à exploiter avec les enfants. Voilà du plaisir en perspective à condition de ne pas le gâcher en « expliquant » trop aux enfants.

- -Chaque jour de la semaine, je bois 2 berlingots de lait de 20 cl.
  Je bois : 7 fois 2 fois 20 cl : 7x2x20 cl
  14 fois 20 cl : 14x20 cl
  7 fois 40 cl : 7x 40 cl

LA GEOMETRIE EN FRANÇAIS (mais oui !)

Oralement : 4 couches (H) de 8 rangées (L) de 6 $m^3$ (I)

Par écrit : 4x(8x6$m^3$) Voilà le volume de la classe , tout simplement .

ADIEU à cette ancienne obligation :Et surtout l'unité devant !(1m3x4x8x6)

**LA MLILTIPLICATION EN CLASSE PAR LE DÉTAIL**

L'objectif de cette partie est de proposer à l'enseignant une continuité dans l'appropriation et la maitrise du triple aspect de la multiplication et de ses ramifications : enlier par entier / entier par fraction / fraction par entier / fraction par fraction, etc .

La progression ébauchée ici n'est pas la preuve d'une trop grande prudence. Son intention est d'attirer l'attention sur les multiples facettes d'un concept que l'enfant rencontrera pendant toute sa scolarité, dans un ordre qui sera, bien entendu, dicté par les circonstances du moment: projet ou activités fonctionnelles. Il faudra cependant assurer des activités de structuration. C'est alors que les « petites tranches » proposées ci- après pourront se révéler utiles. C'est ainsi que l'on verra toute la valeur de « La Mathématique en Français ».

## Prendre un multiple d'un nombre

LA DÉCOUVERTE DE LA MULTIPLICATION AU PREMIER CYCLE

- Préambule : Rappelons-nous à nouveau les « Prouesses » des petits matheux. Nous constatons :
  – La multiplication sommeille en eux comme une addition à répétition;
  – La commutativité et la compensation (croisée) y font déjà surface(voir les différentes façons de ranger les 24 gymnastes).
  – Seul le langage adéquat faisait défaut et l'enseignant a dû intervenir

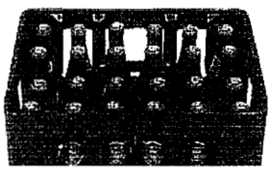
pour suggérer : *Douze groupes de deux élèves. Douze fois deux élèves.*

Rappelons la difficulté rencontrée par certains enfants lors des premières utilisations de ces expressions. Rappelons-nous :deux...deux...deux ...deux...

Les propriétés de la multiplication

Promenons-nous entre les rayons des grandes surfaces pour y découvrir les propriétés de la multiplication :

La commutativité :



La compensation :

Quatre boîtes de 6 œufs c'est la même chose que 2 boîtes de 12 œufs.

Familiarisons-les lentement avec ce langage varié.

*Deux rangées de trois œufs ça fait six œufs, et deux fois ... œufs...Quatre rangées de six bouteilles, et quatre fois six bouteilles...*

*Trois friandises à quinze francs et trois fois quinze francs.*

Écrivons nos découvertes (du langage courant au langage mathématique).

| <u>D'abord ainsi</u> | <u>Puis ainsi</u> |
|---|---|
| Deux rangées de trois œufs, ça fait six œuf | 2 rangées de 3 œufs=6 œufs |
| Deux fois trois œufs et | 2 fois 3 œufs ⟶ 6 œufs |
| Trois fois deux œufs | 3 fois 2 œufs ⟶6 œufs... |
| Trois bonbons à cinq centimes quinze centimes. | 3 bonbons à 5 centimes...ça fait 3 fois 5 centimes... |

- Convenons de commun accord de remplacer ces trois mots-clés :
  « à - de - fois » par ce seul et même signe x qu'ils auront déjà sûrement rencontré dans leur environnement.

  Écrivons dorénavant :

  *3 x 3 œufs = 6 œufs*
  4 x 6 bouteilles = 24 bouteilles
  3 x 5 cts = 15 cts.

  Relisons de différentes façons en utilisant, selon le cas, les mots-clés précités.
  Partons d'une multiplication symbolisée, codée (9 x 3 berlingots) et faisons raconter l'histoire en veillant à la variété du langage.

- Veillons au rythme et à l'intonation lors de la lecture :
  Incorrect : *Trois ……… fois six pommes* (comme on l'entend toujours)

  « Je fais fois 6 »( comme à la TV parfois )
  Correct : *Trois* fois ……… *six pommes.*

- Veillons tout particulièrement aussi à ce que le signe « x » ne soit plus considéré uniquement comme la représentation du terme
  « fois ». Pour ce faire il serait bon de familiariser les enfants le plus tôt possible avec ce langage, accompagné par des dessins ou des photos : *Le double de... ; le triple de...* (à mettre en parallèle avec *la moitié de... ; le quart d'une tarte ; le tiers de...)*

  Si la langue était suffisamment riche en noms exprimant des multiples d'un nombre, le mot « fois » perdrait beaucoup de son « « prestige » néfaste, de son emploi abusif et erroné.
  Plus tard, aux autres cycles, on construira un tableau semblable à celui-ci :

| | | | |
|---|---|---|---|
| deux fois... ou le double de → | 2 x | la moitié de → | 1/2 x |
| trois fois... ou le triple de → | 3 x | (un) tiers de → | 1/3 x |
| quatre fois... ou le quadruple de → | 4 x | Le quart de → | 1/4x |
| cinq fois... ou le quintuple de → | 5 x | le cinquième de → | 1/5x |
| cent fois... ou le centuple de → | 100x | un centième de → | 1/100x |
| dix-sept fois → | 17 x | le dix-septième de → | 1/17 x |

- Mettons-nous d'abord d'accord. De quelles tables parle-t-on ?
  Bon nombre d'enseignants, voire la plupart, parlent toujours de « tables de multiplication », alors que la majorité d'entre eux « voient » les « tables des multiples d'un nombre » (fort heureusement d'ailleurs).

| Table des multiples de « sept » | Signifiant |
|---|---|
| 1 x 7<br>2 x 7<br>3 x 7<br>etc. | 1 x 7 I<br>2 x 7 I<br>3 x 7 I |
| Table de multiplication par 7 | Signifiant |
| 7 x 1<br>7 x 2<br>7 x 3 | 7 x 1 I<br>7 x 2 I<br>7 x 3 I |

- Quel dommage de rencontrer les 2 types dans une même école !
- Un peu d'histoire pour expliquer la confusion existante.
  Au début des années 1960, cette écriture intelligente et naturelle « 5 x 7 F » était encore considérée comme un crime de Lèse-majesté. Il fallait obligatoirement écrire « 7 F x 5 » dont la seule lecture correcte était *sept francs multiplies par 5* (forme passive). Une économie regrettable en a fait : « 7 x 5 » se lisant *sept... fois cinq.* On entend encore souvent : *Je fais...« fois cinq ».*

- Un peu d'avenir.
  Pour le calcul des grandeurs, nous prônons également une lecture nouvelle :

  Aire du rectangle

  *3 rangées de 4 cm2* ⟶ *3 fois 4* cm$^2$ ⟶ *3 x 4* cm$^2$

  (et non 1 cm$^2$ x 3 x 4) STOP

  Exactement au même titre que :

*3 rangées de 4 bouteilles* ⟶ *3 x 4 bouteilles.*

*Ou que*

*3 rangées de 4 biscuits* ⟶ *3x4 biscuits*

*Volume du parallélépipède rectangle*

*3 couches (H) de 5 rangées (L) de 4* $cm^3$

*3 fois 5 fois 4*$cm^3$ *ou 3 fois (5 fois 4*$cm^3$ *)*

*3 x 5 x 4* $cm^3$

- Une progression possible pour la construction des tables

  Groupons l'apprentissage des tables ainsi :

  les multiples de 2 / 4 / 8
  les multiples de 5 / 10
  les multiples de 3/ 6 (et 3/ 9)
  les multiples de 7

  Sautons de plus en plus loin en regardant des objets groupés :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| | 4 | | 8 | | 12 | | 16 |
| | | | | | | | 16 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| | 6 | | 12 | | 18 | | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| | 10 | | 20 | | 30 | | 40 |

- Constatons : compter par 5 c'est réciter la table des multiples de 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 |
| 1 x 5 | 2 x 5 | 3 x 5 | 4 x 5 |

- Construisons et apprenons les tables en groupant les multiplicateurs et non de façon linéaire :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 x 4 € = 8 € | 3 x 4 € = 12 c | 5 x 4 € = 20 € | 7 x 4 € = 28 € |
| 4 x 4 € = 16 € | 6 x 4 € = 24 € | 10 x 4 € = 40 € | |
| 8 x 4 € = 32 € | 9 x 4 € = 36 € | | |

- N'oublions pas la commutativité : 3 x 9 € = 9 x 3€=

  (Anecdote hilarante mais interpellant au bas des notes :23)

- La musique des chiffres aidant ,la mémorisation pure reste de mise, mais il faut rendre l'enfant capable de pallier toute défaillance de sa mémoire en usant des propriétés et des techniques (dont il doit ignorer superbement les noms « savants

  *4 x 4€ c'est le double de 2 x 4 €.*
  *9 x 3 berlingots c'est la même chose que 10 x 3 berlingots auxquels on enlève 3 berlingots.*
  *Je connais 5 x 3 berlingots, je sais que 6 x 3 berlingots, c'est un paquet de 3 berlingots en plus.*

AU-DELÀ DES TABLES

USAGE IMPLICITE DE LA DISTRIBUTIVITÉ ET DE LA COMPENSATION

Les limites de la mémoire

Elles obligent à chercher d'autres stratégies... C'est ici que la distributivité prend toute son importance.

- Rencontrons ou au besoin créons des situations fonctionnelles amenant les enfants à chercher :

  15 *fois 16 € - 15 fois 18 € - 15 fois 17 €*
  *11 fois 17 €*
  *9 fois 14 €*
  *12 fois 7 €*
  *13 fois 8 f*
  *Etc.*
- Écoutons les enfants se débrouiller pour apporter des solutions.
- Structurons leur langage en résumant :

  *15 fois 16 € c'est la même chose que 10 fois 16€ (160€) plus 5 fois 16 € /(80€)*
- Codons et justifions :

  *15 x 16 € = 160 € + 80 € = 240 €*
  - Relisons :

    *15 fois 16 € c'est la même chose que 10 fois 16 € (160 €) plus 5 fois(80€ )*
    *et 9 fois 14 €...*

La compensation demandera SURTOUT une attention particulière :

- Quatre boîtes de six œufs c'est la même chose que deux boîtes de 12 œufs.

  *2 x 500 g/ 4 x 250 g/ 8 x 125 g ou même 16 x 62,5 g*

  Et plus tard :

  *2 x 0,500kg = 4 x 0,250kg = 8 x 0,125 kg = 16 x 0,0625kg*

- Comment échanger mes 40 pièces de 5 centimes?

  *20 pièces de 10 centimes / 2 pièces de 1€*

  *10 pièces de 20 centimes /1 pièce de 2€*

- 20 billets de 5€ = 10 billets de 10€ = 5 billets de 20€

  2 billets de 50 € = 1 billet de 100 €

DU PAREIL AU MÊME

DEUXIÈME ET TROISIÈME CYCLE

- Écoutons et répondons en verbalisant et en codant

  SI

  *trois fois deux pommes, ça fait six pommes*

  *3 x 2 p = 6 p*

  ALORS

  *trois fois deux décilitres, ça fait 6 décilitres*

  *trois berlingots de 0,2 l, ça fait 0,6 l*

  *3 x 0,2 = 0,6 l*

  *trois fois deux centimètres, ...*

  *3 x 2 cm = 6 cm*

  *trois fois 0,02 m, ça fait ...*

  *3 x 0,02 m = 0,06 m*

  Et alors

  *trois fois deux trucs, machins ,bidules,scoubidous , ……..*

  *trois fois deux septièmes*

*Trois fois deux morceaux de tarte = 6 morceaux de tarte ; 3x2 morceaux = 6 m*
*Trois fois 2 neuvièmes de tarte =6 neuvièmes de tarte ; 3x2/9 tarte = 6/9 tarte*
*Trois fois 2 quinzièmes de tarte = 6 quinzièmes de tarte ; 3x 2/15t = 6/15t*

- Décodons oralement et écrivons

| | |
|---|---|
| *3 x 25 €* | *trois fois vingt-cinq euros* |
| *3 x 25 machins* | *trois fois vingt-cinq machins* |
| *3 x 0,25 l* | *trois bouteilles affichant 0,25 l* |
| 3 x *0,025kg* | *trois fois 25 grammes* |
| *3 x 25/37* | *trois fois 25 trente-septièmes(petit silence)* |

etc.

- Observons : un code ne traduit jamais assez fidèlement le langage courant. Distinguons ces cas particuliers.

<u>Du langage au code</u>

Deux fois un quart de tarte ça fait deux quarts de tarte

2 x 1/4 tarte 2/4 tarte (= ½ tarte)

Le double d'un quart de tarte s'appelle une demi-tarte

Du code au langage

*4* X 1/9 tarte = ?

Quelle était la question ?

Trois fois un neuvième de tarte ?

Ou

Comment s'appelle le triple d'un neuvième ?

(DERNIÉRE étape)

- De l'oral au code

| | |
|---|---|
| *Trois bouteilles affichant 1 l* | 3 x *1 l = 3 l* |
| *ça fait trois litres (trois fois un litre)* | |
| *Trois bouteilles affichant 0,25 l* | *3 x 0,25 l = 0,75 l* |
| *(trois fois vingt-cinq centilitres* | |
| *Trois bouteilles affichant 1,25 1* | *3 x 1,25 l = 3,75 l* |
| *(trois fois un litre vingt-cinq centilitres)* | |
| *Quatre fois deux kilos cent cinquante » grammes* | *4 x 2,150 kg = 8,600 kg* |
| *Trois fois deux tartes* | *3 x 2 t= 6 t* |
| *Trois fois 2 septièmes (de tarte)* | *3 x 2/7 t=6/7 t* |
| *Trois fois deux tartes (et) deux septièmes* | |

Dans l'enseignement fondamental, [2 2/7] signifie [2 + 2/7]. Cette écriture, souvent contestée, s'avère cependant fort utile dans des opérations plus complexes faisant appel à la distributivité. C'est la raison pour laquelle nous la maintenons ici. Il suffira, en temps voulu, au secondaire, de convenir que dorénavant cela signifiera [2 x 2/7]

- **Du code à l'oral**

  *6 x 8 €*

  *6 x 0,50 €*

  *6 x 8,50 €*

  *4 x 5,200 kg*

  *4 x 5,250 kg*

  *etc.*

*4 x 2 tartes= 8t*

*4x2/9t = 8/9t*

*4X 0,2l=0,8l*

Remarquez la similitude entre le travail sur le nombre décimal et celui sur la fraction.

**Prendre une fraction d'un nombre**

Rappelons ce que nous avons déjà souligné. Afin d'élargir la lecture orale du code « x », il s'agit d'habituer les « toutes jeunes oreilles » au vocabulaire.

| | | |
|---|---|---|
| le double de | face à | la moitié de |
| le quadruple de | face à | le quart de |
| etc.. | | |

D'ABORD DE VIVE VOIX

| Oral (en toutes lettres) | Écrivons maintenant |
|---|---|
| *La moitié de six pommes, ça fait trois pommes,* | *1/2 x 6 pommes = 3 pommes* |
| *la moitié de* | |
| *la moitié de six décilitres (0,6 l) de jus, ça fait trois décilitres(dl).* | *1/2 x 6 dl = 3 dl*<br>*1/2 x 0,6 l = 0,3 l* |
| *La moitié de 6 morceaux de tarte,* | *1/2 x 6 morceaux de tarte = ….* |
| *la moitié de 6 septièmes de tarte,* | *1/2 x 6/7 tarte = 3/7t* |
| *le quart de huit neuvièmes (de* | *1/4 x 8/9 = 2/9 tarte.* |
| *Le tiers de neuf décilitres de jus,* | *1/3x 9dl= 3 dl OU 1/3 x0,9l* |
| *les deux tiers de 9 décilitres ça fait 6 décilitres* | *2/3x 9dl= 6 dl OU 2/3 x 0,9 l= 0,6 l* |
| *3/8 de 16 bidules ,etc,(en chœur)* | |
| *3/8 de 16 dix-septièmes* | |

*Malgré la litanie qui précède on*

*constate toujours un silence hésitant*

*Mais on a compris !*

Et enfin, un jour:

| | |
|---|---|
| *les cinq huitièmes de quarante [= déterminant] soixante-troisièmes [= nom commun)* | *5/8 x 40/63 = 25/63 (tout simplement)* |

Et n'oublions pas les exercices de lecture, en partant d'énoncés mathématiques semblables à ceux de la deuxième colonne :

*1/3 x 0,75 l* ⟶ *un tiers de 75 centilitres* et 1/3 x *3/4l*

*3/4 x 8/9* tarte ⟶ *trois quarts de 8 neuvièmes de* tarte

*3/4 x 0,8 l*

ou *3/4 x 0,080kg*

*5/7 x 0,63l* ⟶ ….

*2/5X20/37* ⟶ ….

(Il s'agit de la septième multiplication-piège proposée en début d'ouvrage.)

En pratiquant ainsi, nous n'entendrons plus jamais « épeler » ceci :

*3/4 x 0,08 m : 3 quarts fois zéro virgule zéro huit mètres !*

l'ai ceci :

*5/7 x 0,63 l: 5 septièmes fois zéro virgule soixante- trois litres !*

## L'UTILITÉ FONCTIONNELLE DES CONVERSIONS

- Veillons lors de la transcription mathématique à rester proche de la situation de départ en respectant les informations connues.

*J'ai acheté 1/2 kg de viande à 12 € le kg* ⟶ 1/2 x 12 = 6 €

Cependant dans les cas illustrés ci-dessous, une conversion « parlante » s'impose :

J'ai acheté 5 dl de jus à 2€ le litre ⟶ 0,5 x 2 €

J'ai acheté 50 cl de jus à 2€ le litre ⟶ 0,50 x 2 €

J'ai acheté 500g à 2€ le kg ⟶ 0,500 x 2 €.

C'est d'ailleurs ce que la balance affiche.

Les enfants écrivent parfois « 5 dl x 2 €». On justifiera l'écriture suivante : 0,5 x 2€ parce que 5 dl c'est la moitié d'un litre. Cette erreur est très rare. L'expérience a montré que les enfants font spontanément la conversion.

| Pour | On écrira |
|---|---|
| 500 g de pommes à 2 € le kg | 0,500 x 2 € |
| 50 cl de jus à 1,20 € le litre | 0,50 x 1,20 € |
| 750 g de pâté à 10 € le kilo | 0,750 x 10 € |
| 75 cl de crème à 4,80 € le litre | 0,75 x 4,80 € |
| 50 g de … à 80€ le kg | 0,050 x 80 € |
| 62,5g (petit sachet de riz) à 3,20 € le kg | 0,0625 x 3,20 € se lit, se pense 1/16 de 3,20 € (prérequis requis) |

- À nouveau on procédera à l'exercice inverse : de l' écriture (diversifiée) à la lecture (diversifiée). Selon la situation imaginée par l'enfant, on écrira :

  *0,500* x 36 € peut se lire *500 g à* 36 *€/kg ou 500 ml à 36 €/l .*

  *Et 0,5* x 0,60 € peut se lire 5 dm ou 0,5 m (un demi-mètre) à ...

  ou 0,5l (un demi-litre) à ...

  ¼ x 0,200 kg    1/4X0 ,20l    1/4x0 ,2m    ( bien avant 1/4x0,2)

  *0,875* x 3,20 € ⟶ *7 sachets de 125 g de riz (7/8) à* 3,20 €

  *0,1875 x 3,20 € ⟶ 3 sachets de 62,5 de riz (3/16) à 3,20€/kg*

*etc ...*

JUSQU'OÙ PEUT-ON (NE PAS) ALLER ?

- Si *0,5* x 2€ traduisant 5 *dl de jus de fruit à 2 l le litre*
  se lit *5 dixièmes de 2 €, soit la moitié de 2 €*
  et que *0,75 x 0,36 m*
  se lit *75 centièmes de 36 cm, soit 3 quarts de 36 cm*
  alors 0,75 x 0,36 garde, malgré l'absence d'un nom (mètre — litre), un certain caractère « concret » grâce à une lecture correcte :
  *75 centièmes (ou les trois quarts) de 36 centièmes,* le terme « centièmes » étant un nom précédé d'un déterminant « trente-six »

- Comment lirez-vous, dès lors, les calculs suivants ? :

*0,125 x 0,8* *1 huitième de 8 dixièmes*

*0,125 x 0,16*

*0,375 x 0,8*

*0,875 x 0,16*

Et les calculs suivants :

*0,16 x 0,875 ?* *16 centièmes de... (difficile)*

*0,8 x 0,375 ?*

Merci... la commutativité ! 0,375x0,8(facile) et 0 ,875 x0,16 (facile)

- Entraînons les enfants, du degré supérieur, à devenir des as de la simplification des fractions.

| **Lisez** | **Pensez** | **Répondez** |
|---|---|---|
| 2 dixièmes de 15 centièmes (code écrit : 0,2 x 0,15) | 1 cinquième de 15 centièmes (code écrit : 1/5 x 0,15) | 3 centimes (0,03) |
| 6 dixièmes de 45 centièmes (code écrit : 0,6 x 0,45) | 3 cinquièmes de 45 centièmes (code écrit : 3/5 x 0,45) | 27 centièmes (0,27) |

Au tableau noir et dans les cahiers :

*0,2 x 0, l5 = l/5 x 0, l5 = 0,03*

*0,6 x 0,45 = 3/5 x 0,45 = 0,27*

- Commentaires

Pourquoi s'amuser à faire de telles opérations abstraites ? Par défi ? Pourquoi pas, mais pas trop tôt, s.v.p. ! Notre intention est principalement de souligner l'importance capitale d'une lecture qui donne du sens, même aux opérations abstraites. « Contez d'abord…comptez ensuite»

*1/3 x 6,75 l*
*1 tiers de 6, 75 cl*
*1/3 x 3 6/7 tarte*
*1 tiers de (3 tartes 6/7 de tarte)*
*0,25 x 8,100 kg*
*0,25 x 4 8/9 tartes*

2/3 x 9,375 *kg*

*2/3x 6 9/7*

*0,75 x 16,20 EUR*
*0,75 x 4 8/9 tartes*

Puis :

1/5 x 0,45
= etc.

3/5 x 0,035 =
etc.

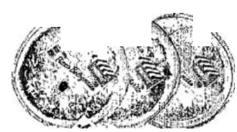
PETIT TOUR EN CUISINE

- Creusons toujours davantage avec comme objectif très lointain :

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$$

Mais patience car la route sera longue !

- Remarquons que jusqu'à présent nos calculs « tombaient toujours juste ». La seule lecture suffit.
  *1/3 de 6 €*
  *1/3 de 3,75 l*
  *1/3 de 0,9l*
  *1/3 de 15/16*
- Mais que faire dans le cas suivant ?
  *Prendre le sixième de 3 pizzas bolognaise :*



Dans la vie quotidienne, que fait-on ? On se munit d'un couteau et surtout on évite tout gâchis ! Coupons peu mais coupons bien ! On coupe les pizzas en deux *(Lorsqu'il s'agit de 3 pizzas aux goûts différents, alors on les coupera probablement en six... afin d'éviter des discussions dans la famille).* On obtient 6 morceaux, c'est-à-dire 6 demi- pizzas (6/2 pizzas). Et chacun reçoit un morceau, 1 demi-pizza (1/2 pizza).

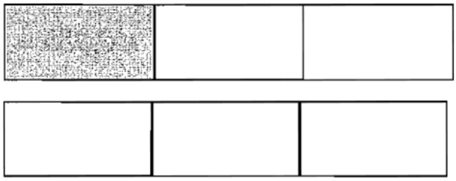
- Traduisons :

$$\frac{1}{6} \; x\,3\,p = \frac{1}{6} \text{ x } \frac{6}{2}\, p = \frac{1}{2}\, p$$

- Relisons :

  *1 sixième de 3 pizzas c'est la même chose que 1 sixième de 6 demi-pizzas* et *ça fait 1 demi-pizza.*

- Dès lors... 1/6 de 2 cakes ? Comment les couper « intelligemment» ? En trois évidemment !

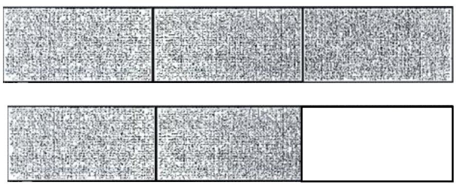


Il n'est pas rare que des adultes (plus que les enfants) disent qu'on a fait des sixièmes ; en fait, ils sont trompés par la vue de six morceaux.

Code :

*1/6 x 2 cakes = 1/6 x 6/3 cake = 1/3 cake*

Puis 5/6 de 2 cakes :



On les coupe aussi en trois. On obtient des tiers, six tiers ⟶
5/6 x 2 c = 5/6 x 6/3 c = 5/3 c

STRUCTURONS DES CAS SEMBLABLES AUX PRÉCÉDENTS

À l'aide de matériel concret, de papier et ciseaux, de dessins et finalement d'imagination (il faut des images dans la tête !)

| | |
|---|---|
| 1/8 x 4 éclairs = ……= | 1/12 x 4 éclairs = |
| 5/8 x 4 éclairs = | 5/8 x 4/12 éclairs = |
| 1/10 x 5 tartes = | 1/15 x 5 tartes = |
| 3/10 x 5 tartes = | 7/15 x 5 tartes = |

- 1/6 de 4 tartes = 1/6 x 12/3 t = 2/3 t
  et ensuite 5/6 x 4 tartes =
  1/12 de 8 gaufres =/
  et ensuite 5/12 x 8 gaufres /1/10 de 6 éclairs /
  et ensuite 5 /8 de 6 éclairs /1/15 de 10 pizzas/
  et ensuite 2/15 x 10 pizzas =

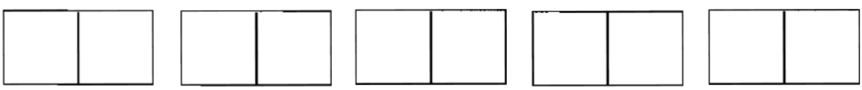
Remarquons que les enfants auront utilisé le PPCM à leur insu total et à la grande surprise... de leurs maîtres. Ce serait alors le moment

opportun de structurer ce concept et de souligner sa raison d'être ( ce qu'on n'a jamais fait !) ( mea culpa) « L'enfant n'aime pas l'activité sans but . »

## PREMIÈRE RENCONTRE AVEC $\frac{a}{b}$ x $y = \frac{ay}{b}$

## OU « FAIRE DES MIETTES »

- Comment faire pour prendre : 1/6 de 5 gaufres ?On les coupe en deux ?



Non !

On les coupe en 3 (procédez de la même façon avec des schémas ) ? Non ! En 4 ? en 5 ? en 6 ?

En 6 cela marche ! Nous voilà avec 30 petits morceaux, appelés sixièmes, parmi lesquels je vais pouvoir prendre ma part !

Nous dirons aux élèves, afin d'être en conformité avec la réalité dans la cuisine, que nous avons fait des miettes.

- Traduisons en langage mathématique.

$$\frac{1}{6} \times 5\ \mathrm{g} = \frac{1}{6} \times \frac{30}{6}\ \mathrm{g} = \frac{5}{6}\ \mathrm{g}$$

Relisons ! :

*1/6 de 5 g c'est la même chose que...*

- **Structurons :**

  *1/4 x 3 tartes = 1/4 x 12/4* t= *3/4 t*
  *1/5 x 3 t*
  *..1/7x 3 t*
  *2/7 x 3 t*

  *5/7 x 6 t*
  *2/9 x 7 t*
  *etc.*

- Ainsi, un jour, à force de mener ce raisonnement, face à *6/13 x 11 t,* l'enfant découvrira spontanément un « truc » c'est-à-dire que a/b X y=ay/b.

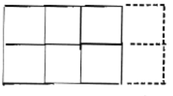
TOUJOLIRS PLUS LOIN : FRACTION X FRACTION

Premier cas traité

Abordons maintenant l'objectif que nous annoncions plus haut, l'application de notre méthode aux cas semblables à 1/6 x 3/4 tarte (le dénominateur de la première fraction est un multiple du numérateur de l'autre). Comment traiter cette notion avec les enfants ?

- Nous savons déjà calculer 1/6 de 3 tartes, de 3 bananes ou de 3 melons. Quels que soient les mets, on les coupera toujours en deux afin d'obtenir six parts, six morceaux. Donc ,nous pouvons prendre, couper (de la même manière) 1/6 de 3 quarts de tarte. Rappelez-vous, il n'y a qu'un seul nombre dans cette expression : « trois », le mot « quart » est un nom comme banane, melon, tarte. Dessinons notre situation :

Il nous faut au moins six morceaux !Coupons les 3 morceaux.. en deux.



On obtient des morceaux appelés « huitièmes »

Pour déterminer le nom de ces nouveaux morceaux, il est indispensable de représenter également le 4e quart manquant et de le couper aussi en deux.

Donc 1/6 x 3/4 t = 1/6 x 6/8 t = 1/8 t et il n'y a pas plus économique comme manière de couper... et de calculer ! Voilà comment, en toute logique, on « multiplie » une fraction par une fraction !

- Comparons et imitons

1/8 x 4 éclairs → 1/8 x 4 cinquièmes de tarte
5/8 x 4 éclairs → 5/8 x 4/5 tarte

1/15 x 5 éclairs → 1/15 x 5/8 tarte
4/15 x 5 éclairs → 4/15 x 5/8 tarte etc.

TOUJOURS PAS DE TRACE DE $\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$

Deuxième cas traité

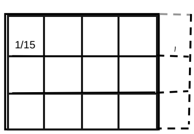
Le dénominateur de la première fraction n'est pas un multiple du numérateur de la deuxième. Il faudra encore veiller au respect du slogan « Coupons peu mais coupons bien. »

- Rappel : 1/6 x 4 tartelettes = 1/6 x 12/3 tartelettes = 2/3 tartelettes.

→ 1/6 x 4 cinquièmes (de tarte) → 1/6 x 4/5 t

On coupe ces 4 morceaux en deux ? Non.On coupe ces 4 morceaux en trois ? Oui. Il y aura 12 petits morceaux.

Pour preuve :




Chaque petit morceau s'appelle un « quinzième ».

- REPETONS : 1 sixième de 4 cinquièmes c'est la même chose que1 sixième de 12 quinzièmes et ça fait 2 quinzièmes.

- Codons : 1/6 x 4/5 t = 1/6 x 12/15.t = 2/15t

Concluons : toujours pas de trace de $\frac{a}{b}$ x $\frac{X}{Y} = \frac{aX}{bY}$

Structurons :

1/6 x 4/5 t → 5/6 x 4/5 t =...
1/12 x 8/9 t → 5/12 x 8/9 t =
1/10 x 6/7 t → 7/10 x 6/7 t =
1/15 x 10/13 t → 11/15 x 10/13t= etc.

## ÂU BOUT DE LA LONGUE PISTE

## OU TOUTE LA LUMIÈRE SUR $\frac{a}{b}$ x $\frac{X}{Y}$

<u>Troisième cas traité</u>

Le dénominateur de la première fraction n'est pas un multiple du numérateur de la deuxième. On sera obligé de « faire des miettes » !

- Comment prendre :

  la moitié de 3 <u>quarts</u> de tarte ?

1/2 X 3/4 t = 1/2 x 6/8 tarte = 3/8 t

- Et 1/6 de 5/8 ? Menons notre réflexion comme pour 1/6 de 5 gaufres (voir supra). Comment couper ces 5 huitièmes ? En deux ? Non, il y aurait 10 morceaux, 10 seizièmes. En trois ? Non, il y aurait 15 morceaux, 15/24 (15 vingt-quatrièmes). En quatre ? Non, il y aurait 20 morceaux, 20/32 (20 trente-deuxièmes). En cinq ? Non, il y aurait 25 morceaux, 25/40 (25 quarantièmes). En six ? Oui ! Nous aurons 30 morceaux, 30/48 (30 quarante-huitièmes) de tarte dont on prendra 1 sixième soit 5 quarante-huitièmes.

  Ceci demande une preuve visible, dessinez-la avec les enfants.

- Résumons :

  1/6 de 5 huitièmes (de tarte) c'est la même chose que 1/6 de 30 quarante-huitièmes (de tarte) et ça nous fait 5 quarante-huitièmes.

- Codons :

$$\frac{1}{6} \text{ x } \frac{5}{8}t = \frac{1}{6} \text{ x } \frac{30}{48}t = \frac{5}{48}t$$

Ce type de raisonnement demande bien sûr plusieurs exemples.
A vous de continuer, dessins à l'appui.

1/4 x 3/5 t =
1/5 x 3/4 t =
1/7 x 3/5 t =
2/7 x 3/5 t =
3/7 x 5/8 t =
etc.

Et nous rencontrerons sûrement des élèves qui découvriront que
$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$ CQFD, Ce qu'il fallait... DÉCOUVRIR !) mais, auparavant on aura parcouru une longue et fructueuse route.
Ce que nous espérons avoir démontré, c'est qu'il aurait été dommage de la survoler en »Jet » comme autrefois.

Rappelez-vous comment jadis nous résolvions ce type de calcul.

sans aucun raisonnement : $\frac{3}{7} \text{ x } \frac{5}{8} = \frac{3x5}{7x8} = \frac{15}{56}$

Rappelez-vous comment on « réussissait » à trouver la réponse du

calcul: $\frac{5}{6} \text{ x } \frac{12}{29} = \frac{5\cancel{x}12^{2}}{\cancel{6}x29} = \frac{10}{29}$ du drill tout simplement

Alors qu'il est si simple de prendre 5 sixièmes de 12€ ( de 12 pommes, de12 vingt-cinquièmes !). 5/6 de 12 « machins » ça fera toujours 10 « machins » ! 5/6 de 12 vingt-neuvièmes ça fait 10 vingt-neuvièmes. Voilà pourquoi la découverte (ou l'imposition ?) trop rapide d'une règle doit être le dernier de nos soucis.

TRANSFÉRONS ET RÉINVESTISSONS

- Partons toujours du concret ; c'est après seulement que l'on pourra
- travailler mentalement. Rappelons-nous d'abord cet ancien cliché :

2/3 x 1,5 = ? (multiplication p8)

$$\frac{2}{3} \text{ x } 1{,}5 = \frac{2}{3} \; x \; \frac{3}{2} = \frac{^{1}\cancel{2}x\cancel{3}^{1}}{^{1}\cancel{3}x\cancel{2}^{1}} = 1$$

Youpie !

L’élève avait trouvé, mais trouvé quoi ? A quelle question avait-il répondu ? L'élève pratiquant la mathématique en français intégrera l'écriture dans une situation : 2/3 DE 1,50 €.

Cette situation peut et doit se matérialiser sous les yeux des enfants .

ici ... .... il n’ya rien à voir

Tandis qu’ici.... Cela saute aux yeux.

2/3 x 1,50€ = 1€

A l’aide du matériel adéquat on fera vivre les situations suivantes : la moitié de 3l c’est la moitié de 6 demi-litres

1/2 x 3 = 1/2 x 6/2 l.

1 cinquième de 2,5 l :

1/5 x 2,5 l = 1/5 x 5/2 l = ½ l

2 septièmes de 3 1/2 l :

2/7 x 3 1/2 l = 2/7 x 7/2 l = 1/2 l

5/8 (0,625) de 4 dl, ce sont 5/8 de 40 cl = 25 cl ou

5/8 x 0,4 dl = 5/8 x 0,40 l = 0,25 l

ou 0,625 x 0,4l

0,625 x 0,40 l (3e multiplication p.8)

2/3 x 1,2 l = 2/3 x 12 dl = 8 dl = 0,8 l

Plus tard

2/3 x 1,2 = ? / 0,0625 x 1,6 = ? : etc.

Ce ne sera possible qu’en retournant de l’abstrait au concret. (Exemple : Une petite mandarine de 62.5 g à 1,60 € le kg vaut combien ?)

$$\begin{cases} 3/5 \times 2\ 1/2 l = 3/5 \times 5/2\ l = 3/2\ l = 1\ 1/2\ l \\ 0{,}6 \times 2{,}50\ l = 3/5 \times 2{,}50\ l = 3/5 \times 250\ cl = 150\ cl \text{ ou } 1{,}50\ l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3/4 \text{ x } 5\ 3/5 \text{ tarte} = \\ 0{,}75 \text{ x } 5{,}6 \text{ l} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5/8 \text{ x } 3\ 1/5 \text{ tarte} \\ 0{,}625 \text{ x } 3{,}2 \text{ m} \end{cases}$$

etc.

Ces 2 paires d'exercices soulignent encore l'importance du travail simultané sur les 2 formes de la fraction. (fraction et nombre décimal).

UNIFORMISONS NOTRE DÉMARCHE

Nous connaissons le nom de 1/2 de 1/3 (moitié d'un tiers): c'est le sixième. Nous connaissons le nom du 1/6 de 1/4 (sixième d'un quart): c'est le vingt-quatrième

- Comment s'appelle le dixième du dm ? Il suffit de regarder le mètre gradué ⟶ le centimètre. Et le dixième d'un dl ? Regardons notre cube de 1 dm3 (litre) débité en planchettes (dl), en réglettes (cl), et en cubes (ml): ⟶ c'est le centilitre. Et un dixième d'un dixième ?

$\frac{1}{10} \text{ x } \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ ( Voilà la réapparition de a/b x x/y ).

Écrivons :

*0,1 x 1 dl –– 0,1 x 0,1 l = 0,01 l*
*Ce qui peut s'écrire aussi 1/10 x 1/10 l= 1/100 l = 0,01l*
*Ce qui peut s'écrire aussi 1/10 x 1/100 m = 1/1 000 m = 0,001 m.*

- Si... alors.

*Si 0,1 x 0,1 l= 0,01 l*
*alors 0,2 x 0,1 l =*
*0,2 x 0,3 l=*
*0,3 x 0,7=*
etc.

- Et plus abstrait :

  *Comment s'appelle un dixième d'un dixième ?*

  *Quel nom donnera-t-on au centième du centième (0,01 x 0,01) ? Quel nom donnera-t-on au centième du millième (0,01 x 0,001) ? Ça s'entend presque !*

- Et nous découvrons ainsi pourquoi en calcul écrit il faut compter les chiffres derrière la virgule.

```
    • ••• •••, •••      (3)
X  ••• ••• •••, ••      (2)
_____________________________
 ……………………..
_____________________________
  ••• ••• •••, •••••    (5)
```

Il ne sera plus nécessaire de croire sans voir !

**<u>Prendre à la fois un multiple et une fraction d'un nombre</u>**

RETOUR A NOTRE BALANCE DIGITALE

- Mise en situation du lecteur et des élèves du 3º cycle (et plus): une extension des exercices « poids/prix » sur balance digitale

| kg | x €/kg | = € |
|---|---|---|
| 19,800 | 7,50 | ? |
| 2,750 | 1,20 | ? |
| 9,375 | 5,60 | ? |
| 1,550 | 1,20 | ? |
| 1,050 | 2,00 | ? |

- Veillons à faire raconter des histoires plausibles avec des prix réels :

  1,050kg de tomates à 2€ le kg

- Écrire l'opération habillée en la lisant à haute voix.

  *19,800 x 7,50 €=150 € - 1,50 €= 148,50€*

  *2,75 x 1,20€=2,40€+0,90€=3,30€*

  *9,375 x 5,60€=56€-3,50€=52,50€*

- Écrire l'opération abstraite, pour le plaisir et en songeant à préparer nos enfants au secondaire :

  *1,55 x 1,2*

  *1,05 x 2*

- Commentaires

  Ce genre d'activités plaît réellement aux élèves de 10 à 12 ans. L’enseignant incrédule sera étonné face aux réalisations des enfants et leur faculté d'user de la simplification des fractions et de la distri-butivité.

  Un exemple vécu

  Pour effectuer *1,65 x 128* ,la majorité des adultes et des enfants ont recours au calcul écrit (ou à la calculette). Quel <u>bonheur</u> alors de découvrir dans certains cahiers :

*1,65 x 128 €= 128 € + 64 € + 12,80 €+ 6,40€ = 211,20€*

CRÉONS DES PONTS ENTRE LE NOMBRE DÉCIMAL ET LA FRACITION

| **Si** | **Alors** |
|---|---|
| 3 X 6 m | 3x6 tartes |
| 3 x 0,40 m | 3 x $\frac{2}{5}$ t |
| 3 x 6,40 m | 3 x 6 $\frac{2}{5}$ t |
| 0,5 x 6,40 m | $\frac{1}{2}$ x6 $\frac{2}{5}$ t |
| 3,5 x 6,40m= | $3\frac{1}{2}$ x 6 $\frac{2}{5}$ t = |
| 18m + 1,20m +3,20m = 22,40m | $18\frac{6}{5}$ t +$3\frac{1}{5}$ t = 22 $\frac{2}{5}$ t |
| Trois fois 6m40(cm) | Trois fois 6t et $\frac{2}{5}$ t |
| <u>Plus</u> (= traduction de la virgule) | <u>plus</u> |
| la moitié de 6m 40(cm) | la moitié de 6t et $\frac{2}{5}$ tarte |
| | (multiplication-piège) |

Développons un nouvel exemple :

| **Si**.... | et | **Si** ..... |
|---|---|---|
| 3 x 4t = 12 t | | $\frac{1}{2}$ x 4t = 2t |
| 3 x $\frac{4}{7}$ t = $\frac{12}{7}$ t | | $\frac{1}{2}$ x $\frac{4}{7}$ t = $\frac{2}{7}$ t |
| 3 x 4 $\frac{4}{7}$ t = 12 $\frac{12}{7}$ t | | $\frac{1}{2}$ x 4 $\frac{4}{7}$ t = 2 $\frac{2}{7}$ t |

**Alors**

$3\frac{1}{2}$ x 44/7$t$ t=(12t+$\frac{12}{7}$t) +(2t+$\frac{2}{7}$t)=14 14/7=16t

ou 12t 12/7 t+2$\frac{2}{7}$ t =14 $\frac{14}{7}$t=16t

- Lecture

  *3 <u>fois</u> [4 tartes et 4 septièmes de tarte <u>plus</u> encore la moitié de4 tartes et 4 septièmes de tarte.*

- Choisissons bien nos exemples

  *2 1/2 x 6 2/5 t = 12 t + 4/5 t + 3 t + 1/5 t= 15 5/5 t= 16 t*

  *ou 12 4/5 t + 3 1/5 t = 15 5/5 t= 16 t*

  *2,5 x 6,40 €= 12 € + 0,80 € + 3 € + 0,20 €*

  *= 15 €+ 1,00 €= 16 €*

  *ou 12,80 € + 3,20 €= 16 €*

- Chemin faisant, nous préparons nos élèves au secondaire :

  *(a + b) x (x + y) = ax + ay + bx + by*

- Et pourquoi ne proposerait-on pas le résultat final aux élèves afin de leur montrer que celui-ci a moins d'importance que la qualité du travail qui y mène .Ils le savent très bien. Et ils aiment bien.

-

  2 $\frac{1}{4}$ x 4 $\frac{8}{9}$ t = ............................................................... = 11t

  5 $\frac{1}{3}$ x 6 $\frac{9}{17}$ t = ............................................................... = 34 $\frac{14}{17}$ t

  2 $\frac{1}{5}$ x 5 $\frac{10}{37}$ t = ............................................................... = 11 $\frac{22}{37}$ t

  3 $\frac{1}{4}$ x 4 $\frac{12}{39}$ t = ..............................*= 14 tartes (multiplication-piège).*

- À vous d'inventer !

<u>Aucun découpage</u> : la seule lecture suffit (pas d'algèbre)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si | 3/5 | x | 10 t | = 6 t |
| Alors | 3/5 | x | 10/11 t | = 6/11 t (6 onzièmes) |
| Si | 2 3/5 | x | 10 t | = 20 t + 6 t = 26 t |
| Alors | 2 3/5 | x | 10/11 t | = 20/11 t + 6/11 t = 26/11 t |

<u>Coupons peu mais bien</u>. (pas d'algèbre)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si | 1/6 | x | 3 t | = 1/6 x 6/2 t = 1/2 t |
| Alors | 1/6 | x | 3/4 t | = 1/6 x 6/8 t = 1/8 t |
| | | | | |
| Si | 2 1/6 | x | 3 t | = 6 t + (1/6 x 6/2 t) = 6 1/2 t = 13/2 t |
| Alors | 2 1/6 | x | 3/4 t | = 6/4 t + (1/6 x 6/8 t) = 6/4 + 1/8 t |
| | | | | = 12/8 t + 1/8 t = 13/8 t |

<u>Ne perdons pas une miette</u>. (algèbre)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si | 1/5 | x | 3 t | = 1/5 x 15/5 t= 3/5 t (a/b X x = ax/b) |
| Alors | 1/5 | x | 3/4 t | = 1/5 x 15/20 t = 3/20 t |
| | | | | (a/b X x/y = ax / by) |
| | | | | |
| Si | 2 1/5 | x | 3 t | = 6 t + (1/5 x 15/5 t) |
| | | | | = 6 t + 3/5 t = 30/5 t+ 3/5 t = 33/5 t |
| Alors | 2 1/5 | x | 3/4 t | = 6/4 t + (1/5 x 15/20 t) |
| | | | | = 6/4 l + 3/20 l = 30/20 l + 3/20 l |
| | | | | = 33/20 t |

<u>Commentaire</u>

Nous voilà confrontés à un travail laborieux, mais constructif, basé sur une application de la distributivité. Alors que d'autres part, il existe des formules toutes faites... La tentation est parfois grande ! Mais « apprendre, c'est un effort », « apprendre, c'est un plaisir ! »"

En guise de récompense pour ce travail bien fait, cherchons avec les élèves une certaine voie de « facilité » qui n'a rien à voir avec l'application aveugle d'un truc, mais qui est basée sur une vérité mathématique qui servira de trait d'union conciliant entre l'enseignement fondamental et l'enseignement secondaire.

Il s'agit de l'utilisation de ce que jadis on dénommait « expression fractionnaire » et « nombre fractionnaire » :

$4\,\frac{1}{5} = 21/5$

- Développons des exemples bien choisis :PASSIONNANT

Doit-on calculer : *2/3 x 1 1/5 t =.............=*

comme ceci :

*2/3 x 1 1/5 t=*

*2/3 t + (2/3 x 1/5 t) =*

*2/3 t +( 2 /3x3 /15t)=*

*2/3t+2/15t=10/15t+2/15t=12/15t=4/5t*

ou bien ainsi : *2/3 x 1 1/5 t=*

*2/3t x 6/5 t=4/5t*

et le tour est joué.

Doit-on calculer : *2 3/4 x 3 1/5 t= ?* *si le cœur vous en dit*

comme ceci : *2 3/4 x 3 1/5 t= 11/4 x 16/5 t = 44/5 t = 8 4/5*

ou bien ainsi : 11/4 X 16/5=44/5=8 4/5

ou *2,75 x 3,20 €= 6,40 €+ 2,40 €= 8,80 €.*

2 3/4 x 1 1/5 t =
11/4 x 6/5 t = 11/4 x 12/10 t =
3 3/10 t = 3 3/10 t (photo super-panoramique)
*Ou 2,75 x 1,20 €= 2,40 €+ 0,90 €= 3,30 €.*

NE PERDONS PAS DE VUE L'AUTRE FORME DE LA FRACTION :

LE POURCENTAGE

En classe , on parlera de l'autre « costume » de la fraction !

*40 % de réduction sur un article de 45 €*
*= 40/100 ou 4/10 ou 0,4 ou 2/5 de 45 €*

*60 % de matière grasse dans ce fromage de 0,450kg*
*= 60/100 ou 6/10 ou 0,6 ou 3/5 de 450 g* (ou comment donner du sens à un des pièges p.8)

*Un détaillant prend 300 % de bénéfice sur 10 €*
*300/100 ou 3 x 10 €*

*À combien s'élève la facture de réparation de ma voiture (350 €HTVA) si on ajoute* la *TVA de 21 % ?*
*121 % de 350 €= 1,21 x 350 €*
*= 350 € + 70 € (2 dixièmes de 350 €) + 3,5 € (1 centième de 350€)*

RICHESSE DE L'ÉVALUATION

Ce qui précède nous montre que dans bien des cas, il est inutile d'avoir recours au calcul écrit (laborieux) ou à la calculette.

L'habitude de la lecture correcte des nombres décimaux aidera l'élève dans l'évaluation du produit d'une multiplication écrite. Par exemple :

| kg | x €/kg | € |
|---|---|---|
| 0,326 | 60,00 | Ce sera environ le tiers de 60 € |
| 0,192 | 25,00 | Ce sera environ le cinquième de 25 € |
| 0,996 | 28,00 | Ce sera un petit peu moins que 28 € |
| 1,367 | 36,00 | Ce sera 36 € et un peu plus qu'un tiers de 36 € |
| 0,671 | 15,00 | Ce seront environ les 2 tiers de 15 € (+ 10 €) |

## QUID DU CALCUL ÉCRIT ?

Avant d'automatiser l'algorithme d'une multiplication écrite, il faudra la décortiquer afin de réaliser qu'elle représente en fait une <u>succession d'applications du principe de la distributivité</u> :

27 x 358 € (ou 358 x 27 €}

358(le multiplicande)

x 27(le multiplicateur)

C'est d'abord :

7 x 8 €= 56 € (6 unités et 5 dizaines)

7 x 50 € = 350 € (5 dizaines et 3 centaines)

7 x 300 €= 2 100 € (1 centaine et 2 unités de mille)

sous-total : 2 506 €

C'est ensuite :

20 x 8 € = 160 € (6 dizaines et 1 centaine)

20 x 50 € = 1 000 € (10 billets de 100 €)

20 x 300 € = 6 000 € (60 billets de 100 €)

sous-total : 7 160 €

**TOTAL : 9 666 €**

3 5 8

x 27

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 0 | 6 |
| 7 | 1 | 6 | 0 |
| 9 | 6 | 6 | 6 |
| M | C | d | u |

M C d u

## QUID DE LA CALCULETTE ?

Certes, l'apprentissage des mécanismes du calcul écrit doit rester au programme de l'enseignement fondamental pour comprendre les rouages. Mais en dehors de ce projet spécifique, l'enfant aura le droit d'utiliser sa calculette lors de la résolution de problèmes, l'essentiel de l'activité mentale devant se concentrer sur la recherche plutôt que sur des calculs fastidieux.

*Il est indigne d'hommes remarquables de perdre des heures à un travail d'esclave, le calcul, qui pourrait fort bien être confié à n'importe qui avec l'aide de machines.*

Leibniz, 1671

La calculette servira aussi d'outil permettant de vérifier l'exactitude d'une opération effectuée lors de l'apprentissage du calcul écrit ou lors d'un calcul mental « spectaculaire ».

RÉINVESTIR

La lecture correcte, significative et intelligente de la multiplication contribuera largement à résoudre des questions auxquelles bien souvent on ne répondait que grâce à des formules mémorisées. Le bon sens élimine cette contrainte à risques.

- En éveil : Quelle est la population de la Suède ?Infos:
  superficie 450 000 km2 densité : 20 h/km2
  Population 450 000 fois (x) 20 habitants.

- Le calcul d'une dimension réduite sur un plan
  Infos : Échelle 1/250 ; dimension réelle : 10 m
  Dimension réduite : 1/250 de (x) 10 m = 1/250 x 1 000 cm = 4 cm.

- Le calcul d'une masse
  Infos : masse volumique du bois : 0,8 (1 dm3 de bois pèse 800 g)
  Volume d'un objet : 375 cm3

  Masse : 0,375 (3/8) de (x) 0,800 kg = 0,300 kg.

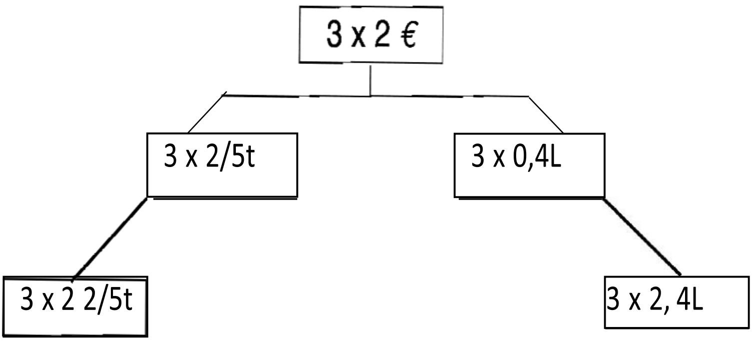
- Le calcul d'une distance parcourue
  J'ai pédalé pendant 40 mn à la vitesse de 30 km/h.
  Distance : j'ai parcouru moins que 30 km ; je n'en ai fait que les deux tiers (40 mn = 2/3 h) : 2/3 x 30 km = 20 km.
  On a vu plus d'une fois l'effet désastreux des formules mémorisées :

  40X30 temps x vitesse =distance

Les 125 visages de la multiplication

Inventaire des multi-im-plications de la multiplication

PRENDRE UN MULTIPLE DE...




VOILA comment on s'est toujours imaginé la multiplication !

PRENDRE UNE FRACTION DE.:

- Bien lire, c'est gagner (pas d'algèbre à l'horizon)

| | |
|---|---|
| 1/2 x 6 € = 3 € | 0,5 x 6 € = 3 € |
| 1/2 x 0,6 l = 0 ,3 l | 0,5 x 0,6 l |
| 1/2 x 6/7 t = 3/7 | 0,5 x 6/7 t |
| 3/4 x 8 € | 0,75 x 8 € |
| 3/4 x 0,8 l | 0,75 x 0,8 l |
| 3/4 x 8/9 t | 0,75 x 8/9 t |
| 1/4 x 8,4 l | 0,25 x 8,4 l |
| 1/4 x 8 4/5 t | 0,25 x 8 4/5 t |
| 3/4 x 8,4 l | 0,75 x 8,4 l |
| 3/4 x 8 4/5 t | 0,75 x 8 4/5 t |

- Coupons peu mais coupons bien (pas d'algèbre à l'horizon)

| | |
|---|---|
| 1/8 x 4 t = 1/8 x 8/2 t = 1/2 t | 0,125 x 4 m= 0,125 x 40 dm = 0,5 m |
| 1/8 x 4/5 t = 1/8 x 8/10 t = 1/10 t | 0,125 x 4/5 t =1 /8X8/10=1/10 |
| 1/8 x 0,4 l = 1/8 x 0,40 l = 0,05 l | 0,125 x 0,4 l = 0,125 x 0,40 l = 0,05 l |

| | |
|---|---|
| 5/8 x 4 t = | 0,625 x 4 m |
| 5/8 x 4/5 t = 5/8 x 8/10 t | 0,625 x 4/5 t |
| 5/8 x 0,4 l = | 0,625 x 0,4 l |
| 1/8 x 2,4 l = | 0,125 x 2,4 l = 0,125 x 24 dl = 0,3 l |
| 1/8 x 1 1/7 t = | 0,125 x 1 1/7 t |
| 3/8 x 2,4 l | 0,375 x 2,4 l |
| 3/8 x 1 1/7 t = | 0,375 x 1 1/7 t |

- Faire des miettes, c'est parfois faire de l'algèbre

| | |
|---|---|
| 1/4 x 3 t = 1/4 x 12/4 t = 3/4 t<br>(ab X x = ax/b)<br>1/4 x 3/5 t = 1/4 x 12/20 t = 3/20 t<br>(ab X x/y = ax/by)<br>1/4 x 0,3 m = 1/4 x 0,300 m = 0,075 m | 0,25 x 3 m = 0,25 x 300 cm = 0,75 m<br>0,25 x 3/5 t = 0,25 x 12/20 t = 3/20 t<br>0,25x0,3 m= 0,25x300 mm =0,075m |
| 3/4 x 3 t = 3/4 x 12/4 t = 9/4 t<br>(a/b X x = ax/b)<br>3/4 x 3/5 t = 3/4 x 12/20 t = 9/20 t<br>(a/b X x/y = ax/by)<br>3/4 x 0,3 m | 0,75 x 3 m<br>0,75 x 3/5 t<br>0,75 x 0,3m |
| 1/4 x 3 1/2 t = 1/4 x 7/2 t =<br>1/4 x 28/8 t = 7/8 t<br>(a/b X x/y = ax/by)<br>1/4 x 3,4 m = | 0,25 x 3 1/2 t<br>0,25 x 3,4 m = 0,25 x 340 cm = 0,85 m |
| 3/4 x 3 1/2 t =3/4 x 7/2 t = ...<br>(a/b X x/y = ax/by) | 0,75 x 3 1/2 t |
| 3/4 x 3,5 m | 0,75 x 3,5 m = 0,75 x 3 500 mm =<br>0,875 m |

Il est inutile de faire un tableau de 60 multiplications. Il suffit de s'en référer au tableau « Prendre une fraction de... » et de faire précéder chaque fraction d'un nombre entier. Quelques exemples :

- Lire, c'est gagner

  *2 1/2 x 6 t= 12 t + 3 t= 15 t*

  *2,75 x 0,80 € = 1,60 € + 0,60 € = 2,20 €*

- Coupons peu mais coupons bien

  *2 5/8 x 4/5 t= 8/5 t + (5/8 x 8/10 t) = 8/5 t + 5/10 t=*

  *16/10 t + 5/10 t= 2 1/10 t*

  2,625 x 0,80 € = 1,60 € + (0,625 x 0,80 €)=

  *1,60 € + 0,50 € = 2,10 €*

- Faire des miettes c'est retrouver « l'ancienne formule »

  *2 1/4 x 3 1/2 t = 9/4 x 7/2 t = 9/4 x 28/8 t= 63/8 t= 7 7/8 t*

  (on y rencontre : 9/4 x 7/2 = 63/8)

  *2,25 x 3,5 m = 7 m + (0,25 x 3 500 mm) = 7 m + 875 mm =*

  7,875 m = 7 7/8 m

Cet inventaire de 125 multiplications différentes se veut un regard global sur l'ensemble des pages sur la multiplication. Il peut servir de fil conducteur dans la progression des activités de structuration afin d'assurer la continuité à travers les cycles du primaire et dans le premier cycle du secondaire. Si besoin en était, il prouve l'importance capitale des opérations habillées.

<u>Considérations finales à propos des fractions utilisées</u>
<u>dans les exercices impliquant la multiplication</u>

Avons-nous fait la part trop belle aux fractions ? Sommes-nous retombés dans le calcul pour le calcul ?

Certes non !

D'une part, nous avons visé exclusivement la compréhension et la maîtrise qui, elles seules, pourront réconcilier les « s'apprenants » avec les règles et les techniques opératoires menant un jour vers l'algèbre (mystérieuse à leurs yeux).

D'autre part, nous avons voulu souligner que le travail sur/avec les fractions et les nombres décimaux est identique à celui sur les nombres entiers.(Eh oui , il n'y a que des nombres entiers ☺)

Enfin, notre objectif en travaillant les fractions est d'assurer une meilleure compréhension du travail sur les nombres décimaux : *0,5x 0,25l= 0, 125l* parce que *la moitié d'un quart de litre, c'est un huitième de litre.*

Résumons-nous

La multiplication en cinq lignes

Essentiel est de parler le français, par exemple :

*3/8 x 0,640 kg = 0,240 kg*

*3 huitièmes de 640 g…*

Autant se simplifier la vie par:

la simplification des fractions : *0,75 x 0,36 l= 3/4 x 0,36 l*

la commutativité : *0,64 x 0,375 = 0,375 x 0,64*

la compensation: *3,75 x 1,60 € = 0,375 x 16 €*

la distributivité (accompagnée d'une lecture correcte):

*15,875 x 32 € = 320 € + 160 € + 28 €*

*Impossible n'est pas Français*

Nul besoin de calculette ni de calcul écrit pour trouver le résultat de :

*0,64 x 1987,5*

*0,64 x 1987,5= ?* (même en lisant bien)

*1987,5 x 0,64 = ?* (même en commutant)

mais :

*19,875 x 64 € = (20 x 64 €) - (0,125 x 64 €) = 1 280 € - 8 €*

(en compensant, en simplifiant la fraction et en lisant correctement). Un prof :Je ne sors pas d'ici sans la preuve.

Pour les nostalgiques du BEF — Longtemps encore, après l'arrivée de l'euro le 1er janvier 2002, les Belges se demanderont à combien s'élèveraient leurs additions en francs belges. Il est bien évident qu'ils se baseront sur la valeur approximative de 40 BEF pour 1 EUR. La Mathématique en Français les y aidera :

| | |
|---|---|
| *Un billet de 50 EUR : 50 fois 40 BEF* | *50 x 40 BEF= 2 000 BEF* |
| *Une pièce de 50 centimes : la moitié de 40 BEF* | *0,5 x 40 BEF= 20 BEF* |
| *Un billet de 20 EUR : 20 fois 40 BEF* | *20 x 40 BEF= 800 BEF* |
| *Une pièce de 20 centimes : 1/5 de 40 BEF* | *0,20 x 40 BEF= 8 BEF* |
| *Une pièce de 5 centimes : 1/20 de 40 BEF* | 0,05 x 40 BEF =20 *BEF* |
| *Un pain à 1,50 EUR : 1 fois 40 BEF plus...* | *1,50 x 40 BEF= 60 BEF* |
| *Une darne à 3,75 EUR : 3 fois... plus 3/4 de...* | *3,75 x 40 BEF= 150 BEF* |
| *Un kg de steak à 9,80 EUR : (10x 40 BEF) - (1/5 de 40 BEF)* | 9,80 *x 40 BEF= 400 BEF - 8 BEF* |

La balance : l'euro impose les nombres décimaux

- Histoires sans paroles

| | kg<br>0,000 | x €/kg<br>0,00 | =€<br>0,00 |
|---|---|---|---|
| 1) | 3,000 | 2,00 | ? |
| 2) | 0,750 | 2,00 | ? |
| 3) | 0,625 | 0,80 | ? |
| 4) | 3,500 | 4,00 | ? |
| 5) | 0,125 | 1,60 | ? |
| 6) | 1,250 | 2,40 | ? |

- Raconter (et/ou rédiger)

  Pensons et parlons en termes de centimes (de nombres entiers).

  *6) 1 fois 240 centimes PLUS 1/4 de 240 centimes..*

  *« Moi, je réfléchis toujours en nombre entiers » 11ans*

- L'opération habillée

  3} 0,625 x 0,80 € = 0,50 €

  *6) 1,25 x 2,40 € = = 2,40 € + 0,60 €=3€*

- L'opération abstraite (façon calculette)

  *3) 0,625 x 0,8 = 0,5*

  *6) 1,25 x 2,4=... + ..... = 3,2*

## DIVISONS LA DIVISION

Formulons un rêve fou qui est pourtant un immense espoir : voir disparaître, à l'école fondamentale, l'expression « divisé par » ! Pourquoi pas ? La division (ne) s'en portera que beaucoup mieux. Les enfants et les instituteurs(trices) (ne) s'en porteront (que) beaucoup mieux.

Il existe deux situations-problèmes qui se traduisent par la même opération abstraite ( *78:* 3 = 26) appelée très maladroitement « la division ». Ces deux situations différentes se distinguent heureusement quand on recourt à l'opération habillée, prônée depuis des lustres :

- *78 € :* 3 = *26 €* se lit 78 euros partagés entre trois personnes ça fait 26 € par personne. Il s'agit de la « division-partage ».
- 78 € : 3 € = 26 fois se lit : 78 euros contiennent 3 € 26 fois. Il s'agit de la « division-contenance ».

Cette distinction est à l'origine du titre du chapitre. Dès lors, celui-ci comprendra deux (NON trois !) parties, l'une traitant de la « division-partage » , l'autre de la « division-contenance ». Au fil des pages, le lecteur se rendra compte que ces deux « costumes », ces deux lectures, ces deux « étiquettes » ont à peine vieilli. Il jugera cependant de l'opportunité et des raisons d'être des modifications qui seront apportées à ces termes dans le cadre de la « division-contenance ».

Ne cherchez pas midi à quatorze heures

Mise en situation du lecteur en quatre phases :

- Histoires sans paroles

**Cherchez les nombres manquants (traitez l'information).**

| kg | x 6/kg | = € |
|---|---|---|
| 2,000 | ? | 6,00 |
| 0,500 | ? | 6,00 |
| 0,250 | ? | 12,00 |
| 4,000 | ? | 12,00 |
| 5,000 | ? | 15,00 |
| 0,100 | ? | 15,00 |
| 0,200 | ? | 36,00 |
| 0,125 | ? | 20,00 |
| 0,050 | ? | 10,00 |
| 0,040 | ? | 10,00 |

Essayez sans crainte avec les élèves de 10-12 ans et plus.
(réussite garantie car ils réfléchissent en français …comme vous venez de le faire.)

- Communiquer

Exprimez oralement d'abord et par écrit ensuite, en une seule phrase en gardant chaque fois le même vocabulaire, en vous abstenant de dire « divisé par » ou « partagé en ». Ne cherchez pas midi à quatorze heures ! Parlons normalement comme on le fait innocemment hors école .

Observation

Vous venez, sans aucun doute, de découvrir le mot-clé ouvrant la porte à des divisions qu'on aurait crues irréalisables en calcul mental ; la suite vous en convaincra. Il s'agit d'un mot trop simple ; c'est ce mot que nous utilisons si souvent hors de l'école et qui est présent cependant dans vos problèmes d'arithmétique : 52 cartes pour 4 joueurs, ça fait combien de cartes par joueur ? C'est la préposition « **P O U R**». (Nous verrons un peu plus loin par quel heureux hasard cette préposition a fait son « entrée triomphale « dans la division.)

*6€ pour 2 kg. Ça fait 3€ le kg*

*6€ pour 500 g. ça fait 12€ le kg*

Les dictionnaires nous en confirment la valeur :

*à la place de*

*en échange de*

*au profit de*

*destiné à*

- Passons aux opérations habillées.

Codez par écrit en utilisant fidèlement les informations de la première phase, c'est-à-dire en conformité avec « notre » définition de l'opération. Ne lésinez donc pas sur les zéros, jadis déclarés inutiles.

*6 € : 2 = 3 €*

*6 € : 0,500 = 12 €*

Relire ces opérations à haute voix revient à répéter vos déclarations de la phase précédente. De nombreux exercices de ce type sont nécessaires pour les enfants déjà imprégnés de l'expression « divisé par ».

Observation

Parmi les nombreux adeptes de la « Mathématique en Français », beaucoup d'enfants et d'adultes se sont déjà mis à exiger une opération habillée encore plus explicite :

*6 € : 2 (kg) =* 3 € *: 1 (kg)* [pour un kilo ou le kilo]

*6 € : 0,500 (kg) = 12 € : 1 (kg)* [pour un kilo ou le kilo]

Et pourquoi pas, dans un premier temps ? Tout est convention somme toute. Et d'ailleurs, ces personnes ont bien compris le vrai sens de la « division-partage et échange ». Ce n'est qu'après que l'on incitera les élèves à l'économie 6 € pour 2 kg ou 2 l ou 2 salades, cela fait toujours 3 € comme prix unitaire 6€ : 2kg=3€ 6€ :0,25=24€

- L'opération abstraite

*6 : 0,5*
*15 : 0,1*
*10 : 0,05*
*10 : 0,04*

Observation

C'est de l'utilisation exclusive de l'opération abstraite que viennent sans doute ces « dogmes » tels que :

*Pour diviser par zéro virgule cinq, il faut multiplier par deux.Pour diviser par zéro virgule vingt-cinq...*

L'opération ne reflète pas un futur ou le début d'une activité ; elle reflète un passé au cours duquel mentalement on a multiplié par 2, 4, 8... Nul n'a d'ailleurs jamais songé à déclarer que « pour multiplier par 4, il faut diviser par 0,25 » ! Ce qui est cependant mathématiquement tout aussi exact ! C'est probablement de là également que proviennent ces listes limitées des anciens manuels et programmes : « En sixième année, l'enfant devra être capable de diviser par... par... et par... »

La « Mathématique en Français » vous permettra, ainsi qu'à vos enfants, de diviser aussi bien par 0,085 que par 0,5 et ce en toute connaissance de cause... sans mémorisation aussi vaine que contraignante.

Appellation division-partage » incontrôlée

Ou de la maladresse des limites de cette « étiquette »

- Où commence, où s'arrête la « division-partage » ? Complétons les phrases des séries ci-dessous avant d'écrire l'opération habillée dans la dernière colonne.

**1)**

| Situations | Solutions | Opérations habillées |
|---|---|---|
| 1) 24 noix POUR 6 enfants ça fait... | 4 noix par enfant | 24 n : 6 = 4 n |
| 2) 48 noix POUR 6 filles... | ... par fille | 48... |
| 3) 24 noix POUR 12 garçons... | par garçon | |
| 4) 48 noix POUR 12 bambins... | 4 par bambin | |
| 5) 12 noix POUR 3 fillettes... | 4 par fillette | |

<u>Commentaires</u>

En vivant ces 5 partages, on peut déjà faire observer aux enfants plusieurs constatations :

– ce sont de réels partages au sens propre du mot ; la « division-partage» mérite ici amplement son nom. On aurait pu dire « 24 noix partagées entre 6 enfants » ;

– en comparant les exercices 2 à 5 au premier et en observant les nombres, on constate les modifications du résultat en fonction du changement portant sur une des informations. Les exercices 4 et 5 offrent même une première rencontre avec la compensation parallèle ;

– le mot le plus important dans ces situations est le mot « noix » car la question est de savoir ce qui revient à chaque individu. Voilà pourquoi il est superflu d'habiller les diviseurs ;

– la « division-partage » répond à la question : « Combien de... pour 1. ? » (comme sa sœur jumelle).

**2)**

| Situations | Solutions | Opérations habillées |
|---|---|---|
| 6) 50 € POUR 5 CD ça fait... | 10 €pièce | 50 €:5=10€ |
| 7) 50 € POUR 25 cahiers. | ...€ pièce | |
| 8) 50 € POUR 50 pains. | ...€ pièce | |
| 9) 60 € POUR 3 kg de lotte... | € le kg | |
| 10) 60 € POUR 6m de velours | .....€ le mètre | |

<u>Commentaires</u>

Au sens strict des mots, l'appellation « division-partage » n'est plus valable ; il n'y a plus de partages mais il y a des <u>échanges.</u>

(superbe découverte par des enfants de 8 ans)

3) Remarque préalable

Au sens strict du verbe, on ne peut partager qu'en 2-3-4 ou 5... parties égales, c'est-à-dire en un nombre entier. Donc la « division -partage » par un nombre décimal ou une fraction n'existe pas. C'est ce qu'on peut croire. Il y a 40 ans, dans une classe où le titulaire reprenait cette affirmation devant ses élèves, une petite fille de 11 ans osa le contredire : *Jean dépense 40 F pour 4 « mini-Mars » et ça fait donc 10 F pièce. Ève dépense 40 F pour 10 bonbons et ça fait donc 4F le bonbon. Martine dépense 40 F pour 2 litres de lait et ça fait donc 20 F le litre. Moi je dépense 40 F pour un demi-kilo d'oranges et ça fait 80 F le kg.*

Traduction : 40 F : 1/2 (kg) = 80 F (pour 1 kg). 40 :1/2=80
La vérité sort de la bouche des enfants ! Cette petite fille nous a livré, ce jour-là, ce mot révolutionnaire... par sa simplicité : « **POUR** ».

| Situations | Solutions | Opérations habillées |
|---|---|---|
| 11) 5 €pour 1/2 kg, ça fait. | € le kg | 5 € : 1/2 = 10 € |
| 12) 6,50 € pour 250 g, ça fait. | € le kg | 6,50 €: 0,250 =... € |
| 13) 1,20 €pour2 dl de crème, ça fait. | . € le litre | 1,20 € : 0,2 = ... |
| 14) 1,70 €pour 100 g de pâté, ça fait. | . € le kg | 1,70 €: 0,100 = ... |
| 15) 0,40 € pour 50 g de chips, ça fait. | € le kg | 0,40 €: 0,050 = ... |

Commentaires

Faut-il encore répéter que le code le plus condensé, le code « officiel», l'opération abstraite vient en bout de course :

Exercice 15 : *0,4 : 0,05*

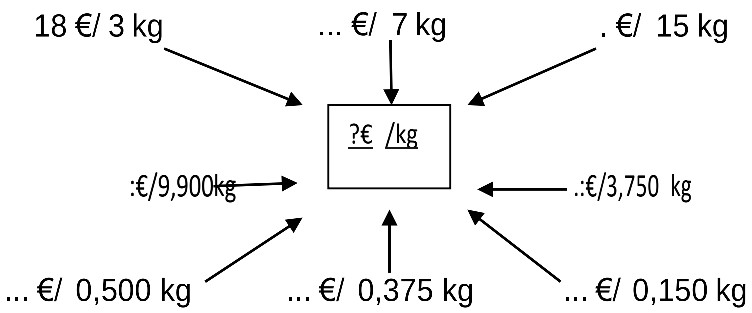
L'appellation « division-partage » est rarement judicieuse ; osons y ajouter l'appellation « division- échange ». Elles répondent toutes deux à un même type de questions : Combien de noix pour 1 enfant ? Combien d'euros pour 1 cahier ? Combien d'euros pour 1 mètre ? Combien d'euros…
Se référant à l'exercice 12 : les enfants font aussi spontanément cette conversion en écrivant l'opération habillée : 250 g = 0,250kg

À défaut, on aura recours à la balance digitale, Se référant à l'exercice 13: l 'écriture erronée « 1,20 € : 2 » donnerait le prix de 1 dl.

Définition de ces divisions :

« Diviser » c'est donc revenir à une valeur unitaire inconnue à partir :
– D'un multiple de ce nombre (12€ :3)
– d'une partie (fraction) de ce nombre (1 € : 0,5)
- d'une association des deux cas prénommés (10 € : 2,500)
« Diviser » c'est donc chercher un nombre inconnu à partir :
-D'un multiple de ce nombre (24 noix : 6)
-D'une fraction de ce nombre (1€ : 0,5)
-D'une association de deux cas (10€ : 2.500)

Définition sans paroles :




C'est donc bien la « division-partage » ainsi que la « division-échange » qui sont l'inverse de la multiplication.

## Quand les couleurs de la vie rentrent dans l'école

Quand la vie extérieure à l'école y entre (par exemple par le biais de la publicité), les enfants se « battent » pour faire des mathématiques et ils se mettent à créer pour le plaisir. Nous vous souhaitons autant de plaisir qu'eux en vous surprenant vous-même.

Voici une série d'activités qui débouchent sur une division avec soit:

- un diviseur entier ;
- un diviseur décimal (ou fraction) inférieur à l'unité ;
- un diviseur décimal supérieur à l'unité.

La question sera toujours la même : Combien pour 1 kg ? Combien pour 1 litre ? Mais pour y arriver,  nous vous proposons -  comme vous le ferez avec vos élèves — de vous poser d'abord une autre question fondamentale : « Le kg (le litre) coûtera-t-il plus ou moins que le prix connu ? » (excellant !)

Rappel, il ne faut négliger aucune étape :

- prendre connaissance des informations ;
- les traiter : répondre aux questions ;
- communiquer oralement (et de temps en temps en toutes lettres  afin de prendre conscience du processus  mental fourni pour arriver à la solution);
- communiquer en utilisant le code : l'opération habillée, photo de la communication précédente ;
- et enfin écrire l'opération abstraite, ce qui devient alors, mais seulement alors, un vrai plaisir (n° 15 ; *0,4 : 0,05= 8).*

Trop souvent on s'est limité à cette dernière étape en provoquant l'incompréhension totale chez un grand nombre d'enfants et d'adultes et l'insatisfaction même des meilleurs « techniciens ».

Quelle joie de pouvoir « écorcher les oreilles » du prof en « épelant » : zéro virgule quatre divisé par zéro virgule zéro 5 égale huit ou en énumérant les touches de la calculette sur lesquelles on tape : « zéro virgule quatre … etc. ». Ceci après avoir déclaré que 40 centimes  pour 50g c'est la même chose que 80cts pour 100g

Diviseur entier


Question: 24 F pour 3Kg de carottes, ça fait combien pour 1 Kg ?

Réponse : 24 F pour 3Kg de carottes, ça fait 8 F le Kg

Opération habillée,   la PHOTO : 24 F : 3 = 8 F

Opération abstraite : 24 : 3 = 8

*NETTOIE-TOUT*

2L 36 F

*CHOCOLAT AUL.AIT BOURRE*

*Praliné, banane ou moka/rhum* ***18F***

Nous sommes dans le domaine des « tables »et de la mémoire.


La distributivité entre en jeu.
Racontons les histoires: 72 F pour 3 litres c'est (60 F + 12 F) pour 3 litres,
et ça fait donc (20 F + 4 F) soit 24 F le litre.
L'opération habillée devient une photo panoramique :
72 F : 3 = 20 F + 4 F = 24 F
Opération abstraite (l'œuvre de la calculette):

72 : 3 = 24

104 F : 8 = ... + .. =


549 F : 9 = ... + ... =

***FERMETTE***

CREME GLACEE VANILLE OLA

2L ~~139~~ **129F**

Une virgule dans le résultat :
129 F : 2 =

- Diviseur décimal inférieur à l'unité
  Les publicités suivantes nous offrent des exemples illustrant l'importance et la nécessité de partir du particulier pour arriver au général.

Il sera donc tout à fait inutile de mémoriser le soir ce qui coulait de source le matin. D'ailleurs, la liste des « trucs » à mémoriser serait beaucoup trop longue.

Ces 8 publicités nous offrent même les solutions (à cacher du doigt le temps que les enfants cherchent)

***Passendale***

*100 g* 35 F
*-350F/kg*

Hooiwagen
*Fromage jeune*
*100 g* 19 F

**Chester**
*Fromage fondu Kraft*
*100 g* 29 F
*kg • 290,-*

*Paschka*
*Fromage fondu au chocolat*
*100 g* 3 ,30 F
***kg : 330,-***

***Saucisson* de jambon**
*En tranches*
*100 g* 15 F
*kg : 1S0,-*

**Rosette de *Lyon***
*En tranches 100g* *45F*
*100 g* 45 F
*kg : 450,•*

***Pate cuit***
*En tranches*
*100g* *26F*

***Salade* de poulet**
***cocktail***
*100 g* 27 F
***-kg :270 :-***

Développons un cas

Oral (et/ou par écrit):

*35 F pour 100 g de Passendale, ça fait combien pour 1 kg ?Plus ou moins ?*

*Plus (évidemment !), 10 fois plus.*

Photo : 35 F : 0,100 = 350 F
Puis : 35 : 0,1 = 350
Bien plus tard : X : 0,1 = 10 X

D'autres exemples :



*MINELMA*
*Minarine*
*250 g*
*35,50F*

*BISCUIT DESSERT*
*Au beurre*
*125 g* 25 F

Carnation
*Pour le café*
*(achat par 215 p.)*
*10ml* $1^{60}$ F

*FROMAGE FONDU*
*maigre au jambon*
*200 g* 62 F

*FROMAGE*
*FONDU/200G*
71

*BECEI-*
*20 cl* 27 F

*CIBOULETTE*
*50 g* 45 F

*D'outre L.YS*
*Eau de toilette*
*muguet avec brin*
*50ml* 149 F

*GRAHD DUT*
*25 ml* 95 F

Liste des procédés

Vous et vos élèves avez divisé par 0,5 - 0,25 - 0,2 - 0,125 - 0,05 - 0,025 - 0,01


Ne jetons plus nos dépliants publicitaires, ils contiennent des perles de « matériel didactique ». Voici une image très parlante.

Une difficulté :

69 F pour 300 g

ça fait .... F pour 1 kg

Décortiquons la pensée humaine :

*69 F pour 300 g; cela revient à combien pour un kg ?Plus ou moins ? Plus !*

*Combien de fois plus ? Impossible de le dire contrairement aux cas précédents. Il faut se débrouiller.*

*Cherchons le prix de ... 100 g. C'est plus ou c'est moins ?C'est moins, trois fois moins. 100 g coûtent 23 F...*

Et ça saute aux yeux !... grâce aux 3 sachets, aux 3 centaines.

*1 kg coûte 10 fois plus soit 230 F*

Cela mérite une belle photo « panoramique ».

*69F: o,30O =23F :0,100=230F*

Voilà que vos élèves manient la « règle de trois » sous forme de compensation parallèle... et à leur insu total.

*La mathématique est une pensée,une*
*pensée sûre de son langage.*

Bachelard

Signalons à propos de cet exemple et de tous les suivants, déjà soumis à des centaines d'enfants (10 -12) et des centaines d'adultes, que pratiquement personne ne songe à pratiquer la compensation par le haut. (à quelques exceptions près) c'est-à-dire 69 : 0,3 = 690 : 3. Et vous ?

Voici des occasions rêvées pour « voir » les caractères de divisibilité par 3 et de rencontrer quelques beaux cas de distributivité !


81 F : 0,300 =

27 F : 0,100 =

... F : 0,75 =
... F : 0,25

**STASSEN**
*Cidre sans alcool*
*P5che*
*75 cl* 99F
*Exotic*
*75 cl* 105F
*75 cl* 1 17 F

LA PASGALOU
*Gaufres de Liège*
*300g* **45 F**

***PATE A TARTINER***
*aux noisettes*
*750G* **69F**

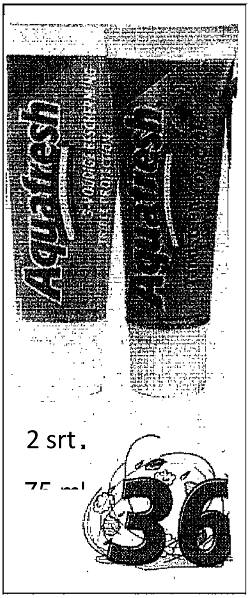
***LA CROIX*** *wc*
*En promotion*
*720ML* **69F**

***KELLOGG'S***
*Corn flakes*
*375g* **5 7 F**

***CHATEAU MONTEILS***
*1990 Sauternes Â.C.*
*37,5ml* **387 F**

... F : 0,750 =

... F : 0,250




***CROKY***
*Bolognèse*
*75 g* 30 F

***VEDETTES***
*AU FROMAGE*
*Fines herbes*
*ou bacon*
*75 g* 27F

(300 F + 60 F + 27 F)

... F : 0,075 = ... =

387 F : 0,375 =

129 F : 0,125 =...

<u>Liste des procédés</u>
Vous et vos élèves <u>avez divisé</u> par 0,3 - 0,75 - 0,375 - 0,075.
Il semble évident que l'aspect le plus intéressant du travail, c'est de

trouver la compensation parallèle qui s'impose, le « passage secret » comme se plaisent à dire les enfants ou encore « le pont »... Et entre deux ponts, on choisit le plus large, le plus solide. **Cherchez le meilleur pont.**

| Petit Gervais | | NESQUIK | BOISSON AUX FRUITS |
|---|---|---|---|
| *6 x 100 g* 105ff | *600 ml* 75F | *3 x 200 ml* 54 F | *3 x 0,20 l* 27 F |

***48 F: 0,600=8F :0,100=80F( :1kg)***

| JUS DE FRUITS |
|---|
| *Sans adjonctionde* |
| *3 x 0,2 L* |

Pour les autres, il s'avère beaucoup plus aisé de passer par 200 g 200 ml — 0,2 l — 20 cl :

*27 F: 0,6 = 9 F: 0,2*

Ces considérations sont destinées au lecteur. De grâce, n'expliquez rien à vos enfants. Pourquoi pas ?

*Apprendre, c'est une aventure. Il ne s'agit jamais de suivre un chemin balisé. Apprendre, c'est un effort. Les savoirs ne se donnent pas. Il se conquièrent. Apprendre, c'est un risque. Apprendre, c'est se tromper. L'erreur, même répétée, est indispensable*

*à l'apprentissage. Apprendre, c'est* créer *mais pas à partir de rien ! Apprendre, c'est un plaisir. Non un plaisir immédiat donné par les objets ou les situations attrayantes, mais le plaisir de celui qui avance face aux difficultés et qui se sent grandir parce qu'il se dépasse, parce qu'il prend peu à peu possession de lui-même et du monde qui l'entoure. Le plaisir de la montée n'est-il pas aussi important que celui de l'arrivée ? Apprendre, c'est un enrichissement. Apprendre, c'est entrer dans une communauté : partager, échanger, mettre ses pas dans les pas de ceux qui*

*nous ont précédés.22(J.STORDEUR)*

*SOCRATE N'A JAMAIS ARRETE DE LE REPETER !*

D’autres exemples et le choix du « pont »



*PAIN TOAST*
*Blanc carré coupé*
*400 g* 42 F

*COURONNE*
*FERMtÉRE*
*400 G* 3 F

**YAOURT ENTIER AUX FRUITS** **7,5**
***150G***

Il n’y a qu’un seul « pont »


*de tomates*
*700 g*
35F

***Gâteau***
***à la crème fraîche***
Gâteau
*900 g/boîte* 135F

*SAUCE ARCHIDUC*
*artisanale*
*120 g* 5 4 F

***JAMBON***
*En tranches*
*120G* 42 F

54 F : 0,120 = ? F

N'oublions jamais de faire répéter : 54 F pour 120 g
c'est la même chose que 9 F pour 20 g

et ça fait 450 F le kg

42 F : 0,120 = ?:?=700F

Liste des procédés
Vous <u>avez divisé</u> par 0,4 — 0,9 - 0,15 — 0,12 - 0,7
faut le faire !

Pour trouver le pont, les élèves choisissent le PGCD... toujours à leur insu. C'est l'occasion rêvée de structurer ce concept.(par qui voudrait)


99 F : 0,450= ... = 220€

49F : 0,350=...=140€

**FILETSDE HARENGS**
**En seau**
450g **99F**

45 F : 0,225= ...=

**BAMBIX**
**Au miel**
**45F**

42F : 0,525 =... =

**Biscuits régime**
Au fruit
85g **34F**


3 sultana
3 varieté
3 Soorten

34 F pour 85 g c'est la même chose que... que...
Que 2 F pour 5 g, 4 F pour 100 g, 400 F pour 1 kg !

49F : 0,175 = ...

Conclusion : 34 : 0,085 = 400

**ODOL**
SPRAY
15ML **114** F


9F : 0,030 = ...

CALLEBEAUT
SPEAY 58 Décoration
En chocolat
60g

69F : 0,060 = ...

**PATTEX**
Colle rapide
3g

105F : 003 =

...

La liste des procédés s'allonge
Vous avez divisé par : 0,45 - 0,35 - 0,525 - 0,225 - 0,175 - 0,085 - 0,015 - 0,06 - 0,03 - 0,003. Vos élèves de 11-12 ans le feront aussi !!!


TAHTINETTESH

130 g F

39 F : 0,130 =.....= ? F


28 F : 0,080 =

29 F : 0,580 =


39 F : 0,260 = ... = 150 F

CANDY BAH

Au caramel
ou lait fourré

13,50 F : 0,027 =

36 F : 0,720 =



189 F : 0,180 =


Le dernier vous est offert.
189 F pour 280 g c'est la même chose que... (cerveau en ébullition)

que 27 F pour 40g
le kg de blanquette coûte 25 fois plus.

Liste des procédés

Vous avez divisé par 0,08 - 0,13 - 0,58 - 0,26 - 0,72 - 0,18 - 0,027-0,28 (oui oui !)

Vos élèves de 11-12 ans le feront aussi.

Remarques :

Il est clair que tous ces exercices ne sont pas d'emblée à la portée de tous les élèves d'une sixième année mais une classe en ébullition y parvient assurément... pas à pas. Apprendre ainsi est un plaisir.

Il est clair aussi que nous avons mis la barre beaucoup plus haut que les *Socles* de *Compétences* ou le *Programme* . Il ne faut pas confondre cet ouvrage avec un programme. Il tient simplement à apporter la preuve des avantages de la *Mathématique en Français.* Nous sommes formels en affirmant que les enfants sont « pour ». Et vous ?

Où s'arrête le plaisir du calcul mental ? Où commence le calcul écrit et/ou l'utilisation de la calculette ? Quelques exemples :

| | |
|---|---|
| *45 E: 0,300* | 55 € : 0,300 |
| *Calcul mental* | *Calcul écrit ou calculette* |

**Et pour ces exemples-ci ?**

*KOLLOGG'S*
*375G* 99 F
***COUNTRY STORE***
*750G* 129 F
*ROSTIES*
*750G* 1 4 5 F

*Rice KRISPIES*
*3T5 g* 79 F
*chocos* 8 9 F
*3T5 g*
99 F

*AQUAFRESH*
*Dentifrice triple protection*
*T5 ml* 49 F
*AOUAFRESH 57F*
*Dentifrice anti-tartre*

*SAUTE SPAGHETTI*
*250ML* 4 5 F
*450 ml* 5 4 F
*Piquante*
*450 ml* 66F

**SAUCES EN SACHET**
*Blanche*
*18G* **12F**
*CURRY*
*20 g* **14F**
*30G*
***18F***

**SAUCES EN SACHET**
*Blanche à la créme*
**17 F**
*Tomate*
*38 g* **19 F**
*Poivre vert*
*27G* **21 F**

**CENT WAFERS**
*Gaufrettes fourrées*
*190 g* ***38F***
*Au lait*
*190 g* **3 9 F**

***DINOSAUHUS***
*Biscuits aux céréales*
*225G* **47 F**
*5 x 45 g ml* 6 3 F

La prise de conscience que la solution à cette question « Combien de ... pour 1... ? » débouche sur une division-échange permet « automatiquement » de coder les divisions suivantes et de se saisir de sa calculette ou de passer à l'apprentissage du calcul écrit:

*62 F pour 424 g* ⟶ *62 F: 0,424.*

Que se passe-t-il au fait ? Il n'y a pas de « pont » si ce n'est la plus petite « passerelle » qui soit : 1 g. Rien n’empêcherait de diviser 62 par 424 pour trouver le prix de 1 g et de « multiplier ensuite par 1 000 ». Les habitudes ont fait qu'on multiplie d'abord par 1000 et que l'on divise ensuite par 424 soit 62 000 divisé par 424. C'est une COMPENSATION vers le « haut ».

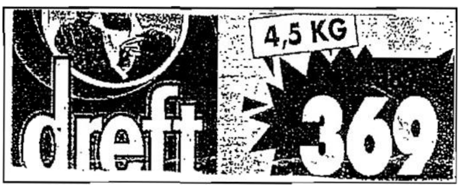
- <u>Diviseur décimal supérieur à l'unité</u> : « Grandes Quantités » Comme pour les cas précédents, il suffit de ne pas rater le « pont ».

Quel est l'achat le plus économique au kg ?



39 F : 1,5 = ... : ... = ... F ou 55 F : 2,5 = ... : ... = ...F

<u>Divisibilité par 9</u> :



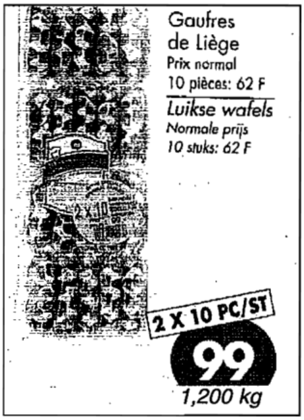


117 F : 4,5 = 13 F : 0,5 = ... F

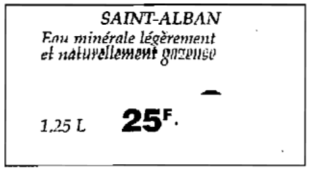
<u>Liste des procédés</u>

Vous avez <u>divisé</u> par 1,5 —2,5 - 4,5

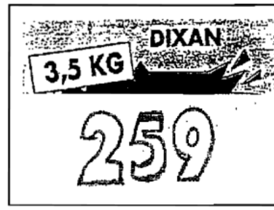
Derniers exemples :




99 F : 1,200 = ...

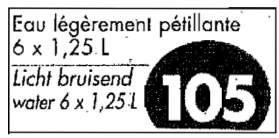



25 F : 1,25 = ...




259 F : 3,500 = ...

(210 + 49)



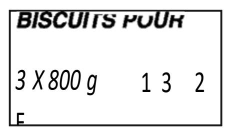

105 F : 7,50 = 7 F : 0,5 = 14 F

(90 + 15)

Verbalisons

105 F pour 7,50 l
c'est la même chose que
7 F POUR 50 cl et ça fait 14 F le litre.

(105 : 7,5 = 14)




132 F : 2,400 =

132 F pour 2,400 kg
c'est la même chose que
11 F pour 0,200 kg et ça fait 55 F le kg.

Liste des procédés

Vous avez divisé par 1,2 - 1,25 - 3,5 -7,5 -

Remarques

La majorité des cas répertoriés dans ces publicités sont transférables à la balance digitale « poids-prix ».

Quelques exemples, dont certains sont des divisions -pièges :

| Kg | x BEF/Kg | = BEF | |
|---|---|---|---|
| 0,250 | ? | 39 | Calcul mental |
| 0,397 | ? | 59 | Calcul écrit |
| 1,050 | ? | 210 | Calcul mental |
| 0,375 | ? | 16,50 | Calcul mental |
| 0,450 | ? | 27 | Calcul mental |

***Quand des enfants (11 ans) se mettent à créer pour le plaisir de découvrir*** .

Le calcul, c'est plus du chinois !


129 : 0,150 = 860

En français : j'ai dépensé 129 F pour 150 g de Gran Antipasta.

Question : Combien coûte 1 kg ?

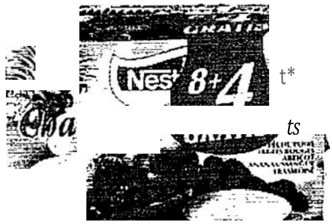
Je n'arrive pas tout de suite au kg. Je cherche d'abord le prix de 50 g. Plus ou moins ? Moins ! Combien de fois moins ? Le prix de 50 g est de 43 F.

1 kg c'est 20 fois plus que 50 g.

20 x 43 F ... ça fait 860 F

129 F : 0,150 = 43 F : 0,050 = 860 F/kg

129 : 1,5 = ?




t*

ts

yoghourt entier aux
fruits, prix habituel

8 x 125 g: 129 F


J'ai dépensé 129 F pour 1,5 kg de yoghourt.
Combien coûte 1 kg ?
Je ne le trouve pas tout de suite.
Je cherche un passage secret : 500 g.
PLUS OU MOINS ? C'est MOINS !
Combien de fois moins ? 3 fois moins.

129 F : 1,500 = 43F:0;500=86F le kg

129:1,5=86 !!!

17F:0,34=???


ns/
rwten (25)

nopri

J'ai dépensé 17 F pour 340 g
de
Combien coûte 1 kg
Je ne Le trouve pas tout de suite. Je cherche un passage secret : 20g.
PLus ou moins ? Moins.
Combien de fois moins ? 17 fois moins.

17F : 0,540 = 1F : 0,020= *50* F le kg

17 :0,54=50

| |
|---|
| **SAUMON FUME** |
| *ECOSSE* |
| 138F |
| 80g |

<u>138:</u> <u>*0,08= ???*</u>

*138F : 0,080 = 34 : 0,020 = 1725F*

J'ai dépensé 138 F pour 80 g de saumo
Combien coûte 1 kg ?
Je cherche Le passage secret : 20 g.
PLus ou moins ? 4 fois moins.

*138F :4=34,50F les 20g*

1 kg, c'est 50 fois pLus que 20 g,.
ALors 1 kg coûte 1 725 F. C'est cher !

*138F :0,08=1725F !!!*

Ces petits artistes n'en finiront jamais de nous étonner ! Citons le cas de ce garçon, Xavier. Il s'approche de l'instituteur en triomphant :

*J'ai une perle, Monsieur!* 30 *divisé par 0,1875 ça fait combien ?*

Xavier nous raconte :

*Notre voisine a réclamé* 30 *F à maman en échange de 3 sachets de riz de 62,5 g, soit 187,5 g. Question : Combien coûte 1 kg de riz ?* 30 *F pour 187,5 g c'est la même chose que 10 F pour 62,5 g (1/16 d'un kg) donc ça fait 160 F le kg (prérequis oblige)*

Xavier écrit clairement au tableau :

30 *F: 0,1875= 10 F: 0,0625 = 160 F.*

Xavier s'amuse en terminant par le départ :

30: *0,1875 = 160.*

Xavier savoure toujours son plaisir lorsqu'on lui parle de sa perle.

À vous maintenant de prolonger la liste des procédés :

| | | |
|---|---|---|
| 42 : 0,12 | 78 : 0,195 (PGCD = 39) | |
| 45 : 0,18 | ... : 1,375 | Choisissez bien |
| 35 : 1,25 | ... : 4,25 | |
| 42 : 0,35 | ... : 7,875 | |
| 224 : 1,75 | ... : 0,72 | |

Notes préliminaires

- Notre premier objectif est de favoriser l'instauration immédiate et définitive de ce « mot-miracle » POUR afin de remplacer le verbe « diviser » (et pour cause !), de même que le verbe « partager » dès qu'il ne requiert plus son véritable sens. À ce propos, l'école aura un rôle à jouer aux réunions des Parents... quitte à piéger l'un ou l'autre papa trop conservateur.
- Les « Prouesses » des tout-petits, ainsi que toutes les pages ci- avant consacrées à la division, offrent déjà un large éventail d'idées et de pistes aux enseignants. Pour plus de clarté, nous essayerons de restructurer tout cela dans cette partie.
- Pour exploiter sans entrave notre numération en base 10 et donc pour les besoins du travail, il faudra inventer, « frapper » de nouvelles pièces de 10 F (Monopoli— notre dm3 avec ses planchettes, ses réglettes et ses $cm^3$ représentant 1 000 € - 100 € - 10 € et 1 €...). Demain, il n'y aura plus qu'à créer le billet de 1 000 €.

ENTIER : ENTIER

- Les premiers pas

Donnons un certain nombre de bonbons à un enfant afin qu'il les partage avec ses deux copains. Observons-le :

| | | |
|---|---|---|
| *1* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *1* |

Et si le paquet est très volumineux:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

jusqu'à épuisement du stock. Ensuite, chacun comptera son dû. Développons leur savoir parler et leur savoir lire :

*24 bonbons pour 3 amis ça fait 8 bonbons pour chacun.*

Comparons la rapidité avec laquelle 2 partages similaires auront lieu :

*Jeroen doit partager 24 images en deux.*

*Marie doit partager 24 Fruit-tella en deux (2 paquets de 10 et4b.)*

Utilisons le savoir parler et le savoir lire... très longtemps.

Au moment opportun nous passerons au savoir écrire <u>codé</u>.

*24 bonbons : 3 = 8 bonbons*

*24 cartes : 2 = 12 cartes*

*24 Fruit-tella : 2 = 12 Fruit-tella*

- La distributivité (du dividende) a déjà été sollicitée à maintes reprises dans les pages précédentes :

  *72 F: 3 — 104 F: 8 — 549 F: 9*

  Décortiquons encore un cas parlant :

  2632 € pour 4 enfants

  Cela demande d'exhiber 24 billets de 100 €, 20 billets de 10 € et 32 pièces de 1 € (pour les besoins de la base 10). Chacun recevra 4 billets de 100 €, 5 billets de 10 €, 8 pièces de 1 €.

  Résumé :

  2 632 € : 4 = 600 € + 50 € + 8 € = 658€

  (2 400 €+ 200 €+ 32 €)

- La compensation a déjà servi à profusion dans les pages précédentes(avec diviseurs décimaux) et dans une moindre mesure avec les diviseurs entiers :

  48 noix : 12 = 24 noix : 6 = 12 noix : 3 = 4 noix ( : 1)

  La compensation bien comprise peut se révéler très utile à ceux qui sont faibles en calcul mental :

  4 896 € : 24 = 2 448€ : 12 = 1 224 € : 6 = 612 € : 3 = 204 € ( :1)

- Quand il faut se contenter de peu, il faut éviter tout gâchis, fidèles à notre slogan : « Coupons peu mais coupons bien. »

  <u>Remarques préliminaires importantes :</u>

  Rappelons-nous tout ce qui a été abordé dans le chapitre sur la multiplication.

$\frac{1}{6}$ x 3 pizzas ; $\frac{2}{6}$ x 2 cakes ; $\frac{5}{6}$ x 2 cakes

Remarquons l'étrange similitude entre :

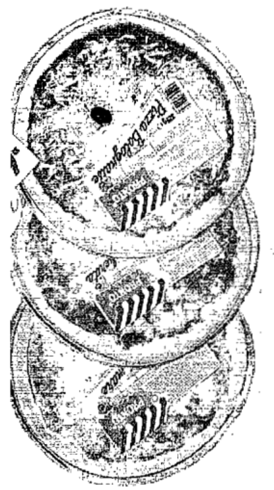
$\frac{1}{6}$ x 2 cakes et 2 cakes : 6

Le résultat est le même. La différence — si l'on peut dire — c'est que l'on opère d'abord avec un couteau (2 cakes : 6) et qu'ensuite on présente à chacun son dû , $\cdot\frac{1}{6}$ x 2 cakes.

Remarquons au passage que la multiplication permet de définir la part de 5 convives ;ex. 5/6 de 2 cakes .

Mettez vos enfants à la tâche :

avec tartes, cakes, pizzas et couteaux,
avec photos et ciseaux,
avec papier et ciseaux,
en dessinant,
en imaginant...




Coupons peu mais coupons bien !

3 pizzas pour 6 personnes
3 p:6 = 6 /2p:6= 1/2P

2 pizzas pour 6 personnes
5 éclairs pour 10 personnes
4 éclairs pour 12 personnes
6 cakes pour 9 personnes
6 pommes pour 8 enfants
6 cakes pour 15 personnes
10 cakes pour 15 personnes...

8 cakes pour 12 personnes.
On coupe en deux ? Non, ça ferait 16 parts.
En trois ? Oui ! On obtient 24 morceaux pour 12 personnes.
Ces morceaux s'appellent des tiers.

Code : $8c : 12 = \frac{24}{3}c : 12 = \frac{2}{3}c$

Mais comment agir pour les cas suivants ?

3 pizzas pour 4 personnes, 5 personnes, 7 personnes...

5 tartes pour 7 personnes ?

On coupe en 2 ? en 3 ? en 4 ? en 5 ? en 6 ?Il faut couper en sept.

On obtient 35 morceaux appelés septièmes.

Code : 5 t : 7 = $\frac{35}{7}$ t : 7 = $\frac{5}{7}$ t, etc.

Pour conclure :

Donc 13 t : 17 = 13/17 (sans réfléchir) parce qu'ici la règle a : b = a/b est de rigueur . On doit faire des miettes.

Remarque :

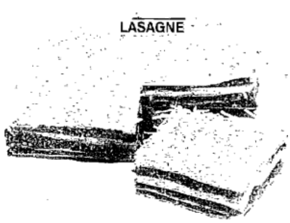
Le lecteur aura certainement remarqué que le nombre minimum de morceaux (de parts) à obtenir correspond toujours au PPCM des deux nombres en présence (les tartes et les personnes) c'est-à-dire le dividende et le diviseur. Nul besoin d'encore perdre son temps à cette structuration.

Les enfants l'utilisent spontanément comme le PGCD .

ENTIER : FRACTION

Dans les pages précédentes, les exemples pullulent : Voyez la Liste des Nprocédés (de 0,5 à 0,027 ou 1,05...).

Illustrons :




60 F pour $\frac{1}{4}$ de lasagne ça fait 240 F pour 1 lasagne.

Opération habillée: 60 F: $\frac{1}{4}$ = 240 F

Opération abstraite : 60 : $\frac{1}{4}$

L'algèbre : x: 1/4 = 4 x

La lasagne a augmenté.

En français : 210F pour ¾ de lasagne c'est la même chose que 70F pour ¼ de lasagne et ça fait 280F la lasagne.
Code : 210F : ¾ = 70F : $\frac{1}{4}$ = 280F
Opération abstraite : 210 : 3/4 =180

Un jour (en algèbre) : X :3/4 = X x 4/3 et X : $\frac{a}{b} = \frac{Xb}{a}$

FRACTION ENTIER

Remarque préliminaire :
Observons certaines similitudes.

| Multiplication | ⟷ | Division-partage |
|---|---|---|
| 1/2 t x 4/7 | | 4/7t :2 |
| 1/8 x 5/7 t | | 5/7 t :8 |

Examinons différents cas :

- Seule la lecture suffit :

  **Si** 4 bananes pour 2 personnes ça fait 2 bananes par personne... **Alors** 0,4l (4 dl) pour 2 personnes ça fait : 0,2 l (2 dl) par personne .

  et alors 4 septièmes d'une tarte pour 2 personnes ça fait 2 septièmes par personne (code : 4/7 t: 2 = 2/7 t).
  4 2/7 t : 2 = 2 1/7 t

  4,6 l : 2 = 2,3 l
- Il faut « couper », transformer, convertir

  S'il y a 4 bananes pour 6 personnes, il suffit de les couper en trois ce qui me donne 12/3 banane pour 6 pers. soit 2/3 banane par personne (code :4 b : 6 = 12/3 b : 6 = 2/3 b).
  Alors 4/7 t pour 6 personnes se coupent également en trois donnant 12/21 tarte, pour 6 pers. soit 2/21 tarte par personne.

  et alors 0,3 l de sirop pour 6 personnes c'est la même chose que

0,30 l pour 6 personnes ça fait 0,05 l par personne(code : 0,3 l : 6 = 0,30 l : 6 = 0,05 l).

On réfléchit bien avant de « couper ».
2 1/2 t : 5 = 5/2 t : 5 = 1/2 t (par personne)
2,3 l : 2 = 2,30 l : 2 = 1,15 l (par personne).

On doit faire des découpages successifs :
1 1/3 t : 6 = 4/3 t : 6 = 12/9 t : 6 = 2/9 t (par personne).

- On doit faire des « miettes », couper en petites parties afin d'en avoir en suffisance pour faire le partage.

  Si 1 cake pour 3 personnes se coupe en trois faisant 3 tiers pour 3 personnes (code : 1 c : 3 = 3/3 c : 3 = 1/3 cake par personne). Alors 1 demi-tarte pour 3 personnes se coupe aussi en trois faisant 3 sixièmes pour 3 personnes soit 1 sixième par personne (code : 1/2 t : 3 = 3/6 t : 3 = 1/6 t par personne).

  Si 5 tartes : 8 = 40/8 t : 8 = 5/8 t d'où en algèbre : a : b = a/b Alors 5/7 t : 8 = 40/56 t : 8 = 5/56 t d'où en algèbre : a/b : x = a/bx et alors 0,3 l : 25 = 0,30 l : 25 = 0,300 l : 25 = 0,012 l
  Et encore : 2 1/2 t : 6 = 5/2 t : 6 = 30/12 t : 6 = 5/12 t.

- Pause

  On aura compris qu'il n'est pas question de « faire des économies de temps », n'est pas d'arriver très vite à la règle générale, à la formule algébrique et n'est pas d'appliquer plusieurs dizaines de fois cette règle. Notre intention de la cacher et la laisser découvrir par les « s'apprenants » .Citations :

  *Algèbre :* Science du calcul des grandeurs représentées par des lettres et qui a pour but d' abréger et de généraliser la solution de questions relatives aux quantités... Veut-on encore parler aujourd'hui d'une chose difficile, inconnue, à quelqu'un, on dit « c'est de l'algèbre pour lui ». (Larousse)

Algèbre: ... résolution des équations avec substitution de lettres aux valeurs de la formule générale au calcul numérique particulier. (Petit Robert)

Donc ! SI (7+3)x(7+3)=49+21+21+9 ALORS $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

FRACTION: FRACTION

Hors école, cette opération ne se rencontre qu'à de très rares occasions, du moins dans le cadre de la « division-partage ». Ce sera plus fréquent
dans la « division-contenance».(ancienne expression)

Exemples :

PAUL a dépensé 0,75 € pour 0,6 (6 dl) de lait. Combien coûte le litre de lait?

Récit: 0,75€ pour 6dl c'est la même chose que

0,25€ pour 2 dl soit 1,25 EUR le litre

Code: 0,75 € : 0,6 = 0,25€ :0,2= 1,25€ (le litre)

I:opération abstraite: 0,75 : 0,6 = 1,25

Histoire semblable traduite en fractions:

Braïm dépense 0,75 :€ pour 0,4 l(4 dl) de jus de fruit.

Combien coûte le litre de jus?

Récit: 2 dl coûtent 2 fois moins cher (0,375 €) ( prérequis !)

et le litre coûtera 5 fois plus (5 x 0,375 € =1,875€)

On pourrait traduire également ainsi:

Récit: 3/4 €: 2/5 =3/8€ :1/5=15/8 :1l=15/8€=1,875€

Code en abrégé: ¾ :2/5 =15/8 (shuut, maître…ce sera un futur plaisir)

• Pause : Rappelez-vous qu'un jour vous avez poliment opiné du chef lorsqu'on vous a expliqué ( ?) ou démontré ( ?) que « pour diviser une fraction
par une fraction on la multiplie par la 2e fraction renversée. » :

a/b : x/y=ay/bx (souvenir, souvenir)

Vous en étiez tellement « renversé » que vous ne l'avez jamais oublié, sachant fort bien que vous ne pouviez l'oublier au risque de...

- Un peu d'humour

Quelle solution préférez-vous ?

OU 2,50 € pour 1,25 l de jus d'orange c'est la même chose que 0,5 € pour 0,25 l et ça fait 2 € le litre.

Codons : 2,50 € : 1,25 = 0,5 € : 0,25 = 2 € (c'est facile à comprendre)

ou 5/2 €: 5/4 = 1/2 € : 1/4 = 4/2 € : 4/4 = 2 € (le l)

Écoutons : 5 demi-€ pour 5 quarts de l =1 demi-€ pour 1 /4 l =2€ l **(fruit d'une belle recherche)**

OU 5/2 : 5/4 = 5/2 x 4/5 = 20/10 = 2 (fruit de quoi ?)

LA « DIVISION-PARTAGE » ET LE POURCENTAGE

Rappel : le pourcentage n'est rien d'autre qu'une fraction. Voici quelques exemples pratiques.

- Les soldes : 25 %

En faisant nos achats pendant cette période nous n'avons dépensé que 90 € pour une veste. Combien aurions-nous payé avant ou après les soldes ? Quelle économie avons-nous réalisée ?

**Traitons et communiquons**

Si nous bénéficions de 25 % de baisse sur le prix (1/4 prix), alors nous ne payons que 75 % du prix plein (3/4 prix).90 € pour 3/4 du prix c'est la même chose que 30 € pour 1/4 du prix et ça fait

120 € pour le prix du vêtement.

Codons :

90 € : 3/4 = 30 €: 1/4 = 120 € (pour le prix) Economie réalisée : 120 € - 90 €= 30 €.

- Au garage

  La facture de réparation de ma voiture s'élève à 968 € TVAC (21 %). À combien s'élève le travail (pièces et main-d'œuvre.) ? À combien s'élève le montant de la TVA ?

Traitons :

La facture TVAC vaut 1 fois le prix du travail PLUS 21/100 du prix du travail. Elle vaut 1,21 x le prix du travail.

968 € POUR 1,21 (du travail) ça fait...

Codons :

968 € : 1,21 = 800 € pour le travail
La TVA : 968 € - 800 € = 168 €.

Le procédé classique (règle de trois) devient superflu :
(968 x 100): 121

CALCLIL ÉCRIT ET/OU CALCULETTE

Cela dépendra de l'objectif du moment : apprendre à maîtriser la technique du calcul écrit OU monopoliser, réserver toute l'attention à la résolution d'un problème nécessitant des opérations laborieuses et se servir simplement de sa calculette afin de ne pas perdre le fil des idées.

Supposons que notre objectif soit le calcul écrit. Nous avons déjà effectué une « division-partage » en calcul mental en la vivant, c'est- à- dire en manipulant des billets de 100 ; des pièces de 10 (d'autres pays, jeux) et des pièces de 1.

Vivons un deuxième exemple en calcul écrit et racontons de long en large, gestes à l'appui le partage de 24 540 F entre 12 personnes :

Nous échangeons 2 billets de 10 000 contre 20 billets de 1 000. Nous avons maintenant 24 billets de 1 000 à partager entre 12 personnes soit 2 billets de 1 000 par personne.
Il ne reste aucun billet de 1 000.
Mettons prudemment 3 points derrière le « 2 » du résultat.

Il n'y a que 5 billets de 100 . On ne peut les partager. Personne ne reçoit <u>aucun</u> billet (0).
Changeons-les en pièces de 10, nous en avons 54 en tout. Combien de pièces pour chacun ?... 4
Combien de pièces de 10 distribuées ? 48. Il en reste 6. Changeons-les en pièces de 1 60 pièces, donc chacun en reçoit 5. Il ne reste plus rien.

```
24 540 | 12
- 24   |------
       | 2045
-----
  054
 - 48
 -----
    60
   -60
  -----
     0
```

Le professeur se contente de poser les questions et de « créer » l'algorithme : les enfants manipulent et répondent. Ce sera la seule façon de joindre l'utile à l'agréable. Les enfants aiment raconter les maths. Ne posséderaient-ils pas en germe le secret de la « gestion mentale » ?

**RESUMONS EN 3 POINTS**

- Oui, ces divisions sont vraiment l'inverse de la multiplication( voir leurs définitions et les schémas qui accompagnent).

- <u>L'essentiel</u> ? <u>Parler</u> (lire) le français.

15 € POUR 3 kg ça fait 5 € le kg ⟶ 15 € : 3 = 5€
⟶ 15 : 3 = 5…
15 € POUR 250 g ça fait 60 € le kg ⟶ 15 € : 0,250 = 60 €
⟶ 15 : 0,25 = 60
15 € POUR 300 g c'est la même chose que 5 € pour 100 g et ça fait …

15 € : 0,300 = 5 € : 0,100 = 50 € ⟶ 15 : 0,3 = 50

- Savoir jongler :

  Avec la distributivité : 15 060 € : 5 = 3 000 € + 12 € = 3 012 €. (Combien de fois n'avons-nous pas vu 312 € comme résultat en calcul écrit !)

  Avec la compensation parallèle :

  la photo panoramique, la règle de trois, le passage secret, le pont , le ...PGCD

L'euro et le nombre décimal

- La balance : Histoires sans paroles

Combien coûte 1 kg ?

| kg | x €/kg | = € |
|---|---|---|
| 1) 2,000 | ? | 10,00 |
| 2) 2,000 | ? | 0,80 |
| 3) 0,500 | ? | 0,80 |
| 4) 0,300 | ? | 0,81 |
| 5) 5,000 | ? | 3,00 |
| 6) 6,500 | ? | 4,20 |
| 7) 0,720 | ? | 0,90 |
| 8) 0,350 | ? | 4,06 |
| 9) ….. | ? | ……. |

- Raconter et/ou rédiger

  Il suffira de penser et de parler en termes de... nombres entiers et d'exploiter la compensation... et la distributivité.

  2) 80 cts pour 2 kg ça fait...

  4) 81 cts pour 300 g c'est la même chose que 27 cts pour 100 g...

  5) 3€ pour 5 kg ça fait...

  8) 4,06€ pour 350 g, c'est (350 cts + 56 cts) pour 350 g,

  c'est (... + ...) pour 50g

  et ça fait ... 6€ le kg.

- Opération habillée

3) 0,80 € : 0,500 = 1,60 €

6) 4,20 €: 3,500 = 0,60 € : 0,500 = 1,20

Opérations abstraites

7) 0,9 :0,72=

1) 10 : 2 =

4) 0,81 : 0,3 =

5) 3 : 5 =

8) 4,06 : 0,35 =

9) 2,25 : 0,36 =

Sourions ! Surtout ne l'oublions plus : « Pour diviser par 0,36 il faut diviser par 9 et multiplier par 25 ! »

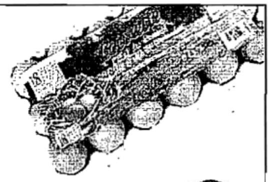
<u>La « Pub » en 2002</u>

La pub de l'an 2023 nous permet de réaliser des divisions spectaculaires à partir des illustrations suivantes :

| | |
|---|---|
| 3,96 : 18 = ? | 1,36 : 0,1 = ? |
| 2,7 : 0,3= ? | 0,72 : 0,08 = ? |
| 3,96 : 0,55 = ? | 1,17 : 0,18 = ? |
| 1,22 : 0,25 = ? | 2,23 : 0,2 = ? |
| 3,22 : 0,28 = ? | 2,7 : 0,3 = ? |

1,26€ :0,150=0,42€ :0,050=8,40€ (exemple)

Et le Kinder Bueno seront aussi chers en 2002 (8,40€/Kg)



18 œufs
frais
mo

159 15 points
3,96 Eur.


2 X 150 ML

Nougots
glacés
2 pièces

2,70 EUR

Salami 1,Sô SUR

de Westphalie

Saucisses de
Foncort, 80 g 0,72 EUR


Jardinière
de légumes
4 variétés
750 g

2,70 EUR

RAVIER DE 250 G

Tomates
Cerises !, 22€.


180 g
1,17 €

Santane
nature, jambon ou
frais et doux, 8 portions


La Cuisine
8 variétés des Belges
550 g

3,96 Eur.

'Nestlé

;Lés self nmln*

3,22 Eur.

***saucisses***
***viennoises***

*200g*
*2,23€*

Exemple :

3,22€ : 0,280 = 0,46 € : 0,040 = 11,50 €

(322 centimes ou 280 + 42)

**REBAPTISONS LA DIVISION-CONTENANCE**

Bref retour en arrière

Petit problème :

Combien de « mini-mars» à 4 F pour 20 F ?

Réponse d'antan:

5 parce que 20 : 4 = 5

Depuis plus de 50 ans, l'opération habillée est venue clarifier cette situation:

20 F: 4 F =5 fois

se lisant:

20 F contiennent 4 F. .. 5 fois.

C'était le seul moyen de combiner dans le bon ordre deux nombres connus (20 et 4) en un troisième inconnu (5). Quoique grammaticalement correcte, cette expression n'était guère chatoyante. Elle sonnait moins bien que « 20 F contiennent 5 fois 4 F ». Est-ce la raison pour laquelle elle n'a pas eu le succès escompté? Dommage ? Non !Il a donc fallu découvrir une autre expression, qui fait le bonheur de bon nombre d'enfants depuis environ cinquante ans. Cette nouvelle expression que vous allez découvrir permet de doubler le rayon d'action de la « division-contenance».

Enfin, dans les années 90, oubliant qu'ils faisaient des maths, des dizaines de « chercheurs» de « 7 à 77 ans » se sont plu à clamer une série de « synonymes» de cette nouvelle expression, les uns plus significatifs, les autres plus poétiques et que vous allez découvrir à votre tour.

Mise en situation du lecteur (et des élèves de 10 à 14 ans)

• Histoires sans paroles ou « savoir penser»

Quelle est la masse des marchandises achetées?

Question secondaire mais primordiale : plus ou moins qu'un kg ?
Un conseil : réfléchissez à haute voix ?

| kg | | x F/kg | = F |
|---|---|---|---|
| 1) | ? | 50 | 100 |
| 2) | ? | 100 | 50 |
| 3) | ? | 20 | 80 |
| 4) | ? | 80 | 20 |
| 5) | ? | 80 | 60 |
| 6) | ? | 60 | 75 |
| 7) | ? | 250 | 100 |
| 8) | ? | 64 | 8 |
| 9) | ? | 64 | 24 |
| 10 | ? | 34 | 51 |
| 11) | ? | 16 | 20 |
| 12) | ? | 35 | 28 |
| 13) | ? | 28 | 35 |
| 14) | ? | 20 | 35 |
| 15) | ? | 40 | 28 |
| 16) | ? | 40 | 6 |
| 17) | ? | 120 | 42 |
| 18) | ? | 350 | 42 |
| 19) | ? | 200 | 210 |
| 20) | ? | 95 | 38 |

NUL ne douterait de votre bon score.

Savoir parler ou « les mots pour le dire »

Remarque :
Prochaine étape :les opérations habillées ,puis abstraites

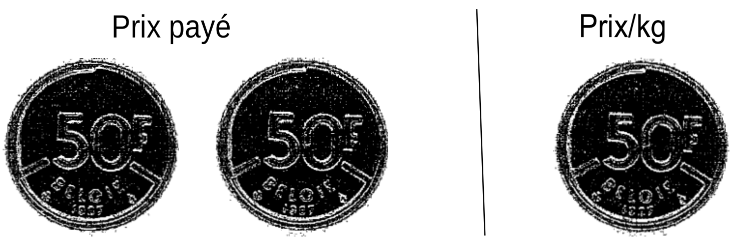
Mais entre les histoires muettes ci-dessus et leur communication codée, pourriez-vous <u>exprimer</u> vos résultats en paroles inédites dans le monde de la mathématique. C'est-à-dire que vous allez vous interdire l'expression « divisé par » et même le verbe « contenir ». En d'autres termes il s'agit de formuler ce qui vous est venu à l'esprit comme idées, comme phrases, sachant que vous devez combiner dans le bon ordre les deux nombres connus qui mènent vers le nombre inconnu, la masse. Ex : 100 F et 5OF 2kg

Comment s'appelle l'action mentale (exercée sur ces nombres) jaillie de votre esprit avant que vous n'en preniez conscience ? Nous vous invitons vivement à jouer le jeu, en vous souhaitant autant d'inspiration, autant de plaisir que vos prédécesseurs.

Confrontez vos découvertes aux leurs. Voici le cheminement de ces chercheurs, depuis les premiers balbutiements jusqu'à la découverte de nouvelles expressions, les phrases-clés qui permettent de réaliser des divisions spectaculaires.

Exemple n° 1 de la page précédente, visualisons la situation :

Prix payé | Prix/kg



On disait et on pourrait toujours dire :

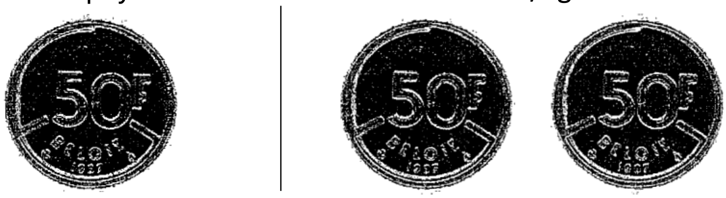
*100 F contiennent 50 F... 2 fois.*

On écrit :

*100 F: 50 F= 2 fois.*

Exemple n° 2

Prix payé — Prix/kg



Comment dire ?... = 0,500 ou 1/2 ?

1^er essai, souvent entendu

*50 F c'est la moitié de 100 F,*

*il y a donc 1/2 kg ou 500 g (0,500 kg) de marchandises.*

Bonne idée, mais cela se traduit par :

*50 F= 1/2 x 100* F(opération mutilée)

2º essai, assez concluant déjà :

*50 F comparés à 100 F sont (font) la moitié de 100 F, il y a donc1/2 kg ou 500 g de marchandises.*

ARRÊTONS-NOUS MOMENTANÉMENT
POUR PARFAIRE NOTRE SAVOIR PARLER.

Évitons les verbes « passe-partout » : être, avoir,...

*50 F comparés à 100 F représentent la moitié de 100 F.*

ou *50 F comparés à 100 F valent la moitié de 100 F.*

Évitons les répétitions (... « de 100F »). Voici 3 possibilités :

*50 F comparés à 100 F valent leur moitié.*

*50 F comparés à 100 F valent la moitié de ceux-ci.*

*50 F comparés à 100 F EN valent la moitié.*

Si on applique cette phrase-clé à l'exemple n° 1 cela donne ceci :

*100 F comparés à 50 F LES valent deux fois.*

*100 F comparés à 50 F EN valent le double.*

Il est évident qu'il faudra verbaliser de nombreux cas afin d'habituer les élèves à ces expressions comme nous l'avons déjà fait innocemment aux pages 37 et 49.
Croyez bien que les enfants ne s'étonnent absolument pas de s'entendre poser des questions dans ce langage clair ; il faudra simplement les habituer à répondre petit à petit par ces mêmes expressions dans des phrases complètes.

Ainsi la « division-contenance » vient d'abdiquer. Vive la nouvelle « division-comparaison » qui double son rayon d'action :

*1º* ex: *« 100 F: 50 F ——2 (fois) »*

*2º ex : •«50 F: 100 F= 0,500 » (•• parole de balance »).*

- Convenons ensemble de l'écriture des opérations habillées :

La lecture orale de la première division se termine forcément par le mot « fois ». Le nombre « 2 » est un nombre abstrait appelé à juste titre le quotient qui signifie « combien de fois ». Il n'est donc pas correct de parler de quotient dans le cadre de la division-partage dont le résultat est un nombre concret : *20 F:2= 10 Francs.*

Par analogie avec l'écriture de l'exemple n° 2 (50 F : 100 F = 0,500), nous proposons de supprimer petit à petit le terme « fois » dans les cas similaires à l'exemple n° 1 (dividende > diviseur).

- Convenons aussi qu'en réalité, et avec le respect dû à *La mathématique en français,* les communications orales codées ne seraient complètes que sous les aspects suivants :

Ex 1 : *100 comparés à 50F LES VALENT deux fois, donc il y a deux kg.* 100 F : 50 F = 2 —> 2kg

Ex 2 : *50 F comparés à 100 F EN VALENT la moitié,*
*donc il y a 500 g* 50 F : 100 F = 1/2 ⟶ 0,500 kg

- Enfin, convenons que les opérations abstraites ne soutiennent guère la comparaison avec nos opérations habillées du point de vue du sens et du reflet de la situation.
  100 : 50 = 2
  50 : 100 = 0,5

Arrêtons-nous une nouvelle fois pour parfaire notre savoir parler comme nos chercheurs de 7 à 77 ans. L'activité proposée dans cette phase amène une multitude d'expressions différentes. Elles reflètent toutes une compréhension réelle de la situation de comparaison (même si certaines relèvent un peu de la fantaisie ou si d'autres ne sont pas toujours « françaises » : phrases 11 à 13).

| Prix payé | | Prix/kg | |
|---|---|---|---|
| 1) 100 F | comparés à | 50 F | les valent 2 fois donc 2 kg. |
| 2) 50 F | comparés à | 100 F | en valent la moitié, donc... |
| 3) 20 F | par rapport à | 80 F | en valent le quart, donc... |
| 4) 80 F | vis-à-vis de | 20 F | les valent 4 fois donc... |
| 5) 60 F | face à | 80 F | en valent les 3 quarts... |
| 6) 75 F | en regard de | 60 F | en valent les 5 quarts... |
| 7) 100 F | à côté de | 250 F | en valent... |
| 9) 24 F | confrontés à | 64 F | en valent... |
| 10) 51 F | opposés à | 34F | en valent... |
| 11) 20 F | «contre » | 16 F | en valent... |
| 12) 28 F | sur | 35 F | en valent... |
| 13) 35 F | nez à nez avec | 28 F | en valent... |
| 14) 35 F | envers | 20 F | |
| 15) 28 F | mesurés à | 40 F | |
| 16) 6 F | par rapport à | 200F | |

17) 210F par rapport à 200 F

18) 38 F comparés à 95 F en valent les 2 cinquièmes

donc il y a 2 cinquièmes

du kg, soit 400 g

(pont =19)

Parmi ces expressions nous retiendrons plus particulièrement les vôtres .

« comparés à », « par rapport à ». La masse achetée étant en effet le rapport entre le prix payé et le prix unitaire (F/kg).

Remarque :

Ces diverses phrases constituent le reflet final d'un leng processus mental qui laisse parfois rêveur, certains enfants « libérés » osant dire ce qu'ils pensent. Exemple n° 13 :

*J'ai acheté plus qu'un kg qui ne fait que 28 F; il reste encore 7 F soit 1/5 de 35 F. J'ai donc encore 1/5 d'un kg en plus ; j'ai acheté 1 kg 200.*

- *Voici quelques moyens pour aider à la visualisation des cas rencontrés précédemment :*

Exercice 3

...compares a...

20 F : 80 F

...en valent le quart

→ 0,250kg

Exercice 4

...par rapport à...

80 F : 20 F =

les valent 4 fois

→ 4 kg

*Exercice 5*

...vis-à-vis de...

60 F : 80 F =

...en valent les 3/4

→ 0,750 kg

Les deux prix sont dans un rapport de 3 à 4 car il y a 3 pièces de 20 F par rapport à 4 pièces de 20 F.

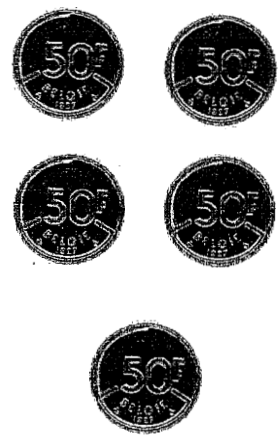
Exercice 7

*...comparés à...*

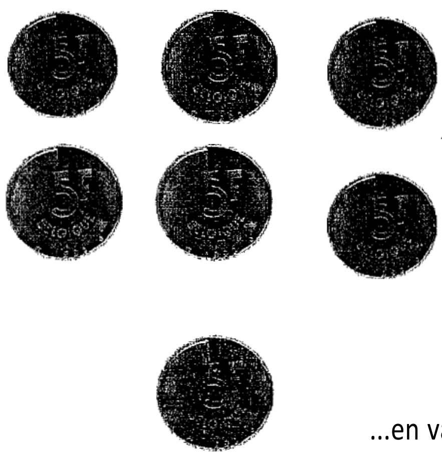
*100 F : 250 F*

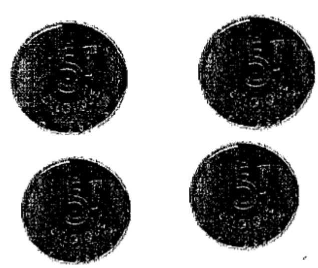
...en valent les 2/5

0,400 kg



Exercice 14





.... Par rapport à ..

35 F : 20F

...en valent, en représentent

les 7/4 → 1,750 kg

Pour les autres cas, l'imagination des enfants fera le reste :

Exercice 6 $\longrightarrow$ 75 F : 60 F

*Il faudrait inventer des pièces de 15 F, Monsieur.*
*5pièces par rapport à 4 pièces de 15 F en valent les 5 quarts*

*75 F: 60 F= 5/4* $\longrightarrow$ *1,250 kg*

Exercice 8 $\longrightarrow$ 8 F : 64 F

*La banque nationale devrait frapper des pièces de 8 F. -*

Exercice 20 $\longrightarrow$ 38 F : 95 F :

*. des pièces de 19 F: 2 à gauche — 5 à droite.*

Et c'est ainsi que les enfants de 10-12 ans jonglent avec le PGCD. Inventer le Plus Grand Commun Diviseur, c'est inventer la Plus Grande Commune Pièce.

« SAVOIR CODER »

| Opération habillée<br>qui parle, qui donne du sens : | Opération abstraite<br>ou l'économie regrettable |
|---|---|
| 10) 51 F : 34 F = 3/2<br>donc 3 demi-kg ou 1,500 kg | 10) 51 : 34 = 1,5 |
| 15) 28 F : 40 F = 7/10<br>soit 0,700 kg | 15) 28 : 40 = 0,7 |
| 16) 6 F : 40 F = 3/20<br>soit 0,150 kg | 16) 6 : 40 = 0,15 |
| 17) 42 F : 350 F = 3/25<br>ou 6/50 soit 0,120 kg | 17) 42 : 350 = 0,12 |
| 19) 210 F : 200 F = 21/20<br>soit 1,050 kg | 19) 210 : 200 = 1,05 |

- En conclusion de cette partie destinée au lecteur et aux élèves du 3e cycle

L'étiquette « division-RAPPORT » conviendrait tout aussi bien que l'appellation « division-comparaison ». Néanmoins, le second terme est plus parlant que le premier pour les enfants.

Dans l'introduction du livre, nous soulignions que nous n'allions pas révolutionner vos compétences. Nous vous avons simplement invité de changer votre fusil d'épaule. Ce qui n'est pas chose facile pour un adulte, ainsi que nous le rappelle G. Ifrah : « À l'âge adulte, l'homme a perdu sa plasticité, l 'aptitude à devenir ».

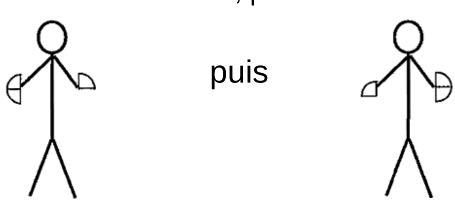
Mais que le lecteur sceptique se rassure : les « jeunes oreilles vierges » ne s'étonnent absolument pas des questions claires, nettes et précises qui leur sont posées dans ce langage plein de SENS.
Les nombreuses années d'expériences vécues avec les chercheurs de 7 à 77 ans nous l'ont prouvé à suffisance. Avez-vous sourcillé en lisant les questions des pages 37 et 49 ?

Osons apprendre <u>avec</u> les enfants : *Éduquer, c'est proposer le patrimoine du milieu et de l'humanité de telle sorte que, pour CHACUN,ce soit une aventure, un risque, un effort, une création, un plaisir, un enrichissement...* (J. Stordeur)

**<u>La division-comparaison en</u>** <u>classe : guide</u> **<u>de progression</u>**

<u>Chaudes recommandations</u> :

- Représentons longuement avec le matériel adéquat les deux grandeurs à comparer. Opérons en deux temps : la « grande » à la gauche des élèves, la « petite » à leur droite ; puis l'inverse.



- Posons notre question dans une phrase complète et en variant le vocabulaire (comparé à, par rapport à):

  *Une demi-tarte comparée à un quart de tarte le vaut... fois ?*

  Exigeons toujours une réponse complète :

  *Une demi-tarte comparée à un quart de tarte le vaut 2 fois.*

- Enchaînons avec la question :

  *Si une demi-tarte comparée à un quart de tarte le vaut 2 fois,alors un quart de tarte par rapport à une demi-tarte en vaut quelle partie ?*

  Écoutons la réponse :

  Un *quart de tarte par rapport à une demi-tarte en vaut la moitié.*

- Codons ainsi maintenant

$$\frac{1}{2}\mathrm{t} : \frac{1}{4}\mathrm{t} = 2$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{t} : \frac{1}{2}\mathrm{t} = \frac{1}{2}$$

Codons... un jour

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ENTIER : ENTIER

| **ORALEMENT**<br>ET « EN TOUTES LETTRES » | **EN SEMI-FRANÇAIS** |
|---|---|
| 6 oeufs (une boîte) comparés à 2 oeufs (une rangée) <u>les valent</u>... ? | 6 o : 2 o = 3 (f) |
| 24 Kinder par rapport à 4 K. (une rangée) <u>les valent</u>... | 24 K : 4 K = 6 (f) |
| 24 bouteilles vis-à-vis de 6 bouteilles les valent... etc. | 24 b : 6 b = 4 (f) |
| 60 € comparés à 20 €... | 60 € : 20 €= 3 |
| 1 000 € par rapport à 200 €... | 1 000 € : 200 €= |
| Entrée en scène de la <u>distributivité</u> | |
| 81 € vis à vis de 3 €<br>(60 € + 21 €} | 81 € : 3 €= |
| 910 € comparés à 7 €<br>(700 € + 210 €) etc. | |

<u>Au niveau des grandeurs</u>

75 m par rapport à 25 m
75 cl comparés à 25 cl
(bouteilles en mains)

75 m : 25 m =

500 g vis-à-vis de 250 g
(paquets de beurre sous les yeux)
875 g comparés à 125 g, etc.

FAIRE INVENTER DES « HISTOIRES », LES RACONTER, LES CODER

| **RÉCIT : Si...ALORS...** | **OPÉRATION HABILLÉE** | **OP. ABSTRAITE** |
|---|---|---|
| **Si** 30 berlingots (une boîte) comparés à 3 berlingots (une cartouche) les valent 10 fois... | 30 b : 3 b = 10 | |
| alors 3 berlingots comparés à 30 berlingots et valent 1 dixième. | 3 b : 30 b = $\frac{1}{10}$ | 3 : 30 = 0,1 |
| **Si** 52 cartes comparées à13 cartes cartes (trèfles) les ... | 52 c : 13 c | |
| alors les 13 trèfles... | 13 c : 52 c | 13 :52 = 0,25 |

**Du CODE À L'ORAL**

25 cl : 75 cl = 1/3 (bouteilles en mains)
125 g : 375 g =
15 centimes : 75 centimes =
etc.

NON, NOUS N'AVONS PAS CHANGÉ D'AVIS !

Oui, nous optons toujours résolument pour les opérations habillées.

Mais dès le 3e cycle, nous pouvons inviter les élèves à « taper » sur leur calculette et à écrire ce que celle-ci « raconte ». C'est ainsi qu'ils pourront se familiariser avec les opérations abstraites qui dès lors ne les impressionneront plus. Qui plus est, bien souvent, ils pourront se rendre compte de la « supériorité » du quotient des opérations habillées par rapport à celui des opérations abstraites.

Choisissons une bonne progression dans le choix des activités. N'oublions pas de faire visualiser les situations.

DE GRACE, prévoyez beaucoup de monnaie dans vos poches.

| **LA MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS** | **REFLET FIDÈLE**<br>**OP. HABILLÉE** | **CALCULETTE**<br>**OP. ABSTRAITE** |
|---|---|---|
| **Si** 50 cts comparés à 150 cts en valent le tiers | 50 :150cts = 1/3 | 50: 150= 0,3 |
| **alors** 100 cts par rapport à 150 cts... | 100 cts : 150 cts = | 100 : 150 = |
|  | | |
| et alors 150 cts comparés à 100 cts... | 150 cts: 100 cts = | 150 : 100 = |
|  | | |
| 40 €... 60 €...<br>60 €... 40 € (billets en mains) | $= \frac{2}{3}$<br>… | = 0,666<br>… |
| 39 cartes... 52 cartes...<br>52 cartes... 13 cartes... | … | … |
| 6 €:.42 €.: | $= \frac{1}{7}$ | = 0,1428 |
| 18 €... 42 €... | … | … |
| 42 €... 35 € | $= \frac{6}{5}$ | = 1,2 |
| 375 g comparés à 875 g<br>en valent les 3 septièmes<br>(3 sachets de 125 g comparés à 7 s.) | 375 g : 875 g = | |
| 12 cm par rapport à 30 cm en... | … | … |

| | | |
|---|---|---|
| 50 cl vis-à-vis de 125 cl en...<br>etc.<br><br>1 € comparé à 3 € en vaut 1/3<br>2 € par rapport à 7 €...<br>7 € vis-à-vis de 11 €...<br>43 €... 53 €...<br>etc. | 7 €: 11 € = $\frac{7}{11}$ | 7 : 11 = 0,... |
| 5€ : 3 €<br>9 €...7 €<br>etc. | 9 €: 7 € = 9/7 | 9 : 7 = 1,... |

Et c'est ainsi qu'une nouvelle « règle générale » verra le jour :

A... B..... ⟶ A : B $= \frac{A}{B}$

Est-ce pour cette raison que les calculettes affichent ce signe ÷

et que les écoliers français écrivent 20 ÷ 5 = 4 ?

Pourvu que cette « règle générale » ne nous joue pas de tours !
34€ : 51€ = 34/51

Mieux : 34€ par rapport à 51 € <u>en valent</u> les 2 tiers grâce aux « toutes nouvelles pièces de 17 € » !

Donc : pas d'automatismes prématurés qui dispensent de réfléchir !

Effectuons enfin des opérations :

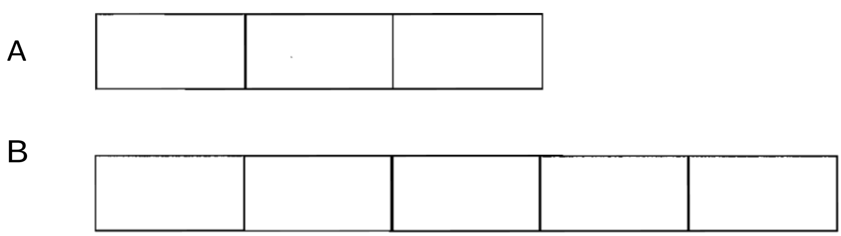
| **LA MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS** | **OP. HABILLÉE** | **OP. ABSTRAITE** |
|---|---|---|
| ⟵ | 15 € : 60 € =<br>45 € : 60 €=<br>60 € : 45 € =<br><br>9 l : 63 l =<br>24 cm : 36 cm =<br>51 € : 68 €=<br>60 cl : 15 cl = | ⟶ |

| LA MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS | OP. HABILLÉE | OP. ABSTRAITE |
|---|---|---|
| 15 €... | 15 € : 60 € | 15 : 60 =<br>7 : 35 =<br>7 : 42 =<br>7 : 63 = |

DESSINONS LES « PROBLÈMES DE RAPPORTS »

Nous avons souvent visualiser des comparaisons .

À partir de là, on demandera de dessiner le rapport entre 2 grandeurs inconnues (A et B) sachant que A comparé à B en vaut les 3/5 (deux cakes différents par ex.). Ce qui donnera :




Ce qui permet de déclarer :
que A par rapport à B en vaut es 3/5
que B par rapport à A en vaut les 5/3
que chaque « case » vaut 1/3 de A
que chaque « case » vaut 1/5 de B.

Dès lors, il n'y aura plus de « problèmes de rapports difficiles »

Pour 2 achats se situant dans le rapport évoqué ci-dessus, voulez-vous résoudre les 4 problèmes suivants (englobant 12 questions).

Faisons parler les dessins !

A = achat A
B= achat B
E= ensemble
D= différence

| | A | B | E | D |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 120 € | ? | ? | ? |
| 2) | ? | 120€ | ? | ? |
| 3) | ? | ? | 120€ | ? |
| 4) | ? | ? | ? | 120€ |

Essayez vers 11-12ans

**DANS LE MONDE DES DÉCIMAUX**

Ce que nous avons fait avec des nombres entiers, nous pouvons le faire avec des décimaux, qui sont des formes particulières des entiers comme il nous plaît de le répéter.

| LA MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS | OP. HABILLÉE | OP. ABSTRAITE |
|---|---|---|
| Si 6 dl comparés à 2 dl les valent 3 fois | 6 dl : 2 dl = 3 | 6 : 2 = 3 |
| alors 0,6 l... 0,2 l | 0,6 l : 0,2 l = 3 | 0,6 : 0,2 = 3 |
| et alors 6 septièmes de t ... 2 septièmes | 6/7 t : 2/7 t = 3 | 6/7 : 2/7 = 3 |
| et dès lors... | 0,12m :0,60m = 1/5 | 0,12 :0,6=(0,2) |
| | 0,15m :0,60m=1/4 | 0,15 :06 |
| | | 0,6 :0,12=5 |
| | 0,150 kg : 0,450 kg | ... |
| ........... | ........ | 0,35 :0,07 |

Dans un souci de progression dans les difficultés, pour ces premières « confrontations » entre 2 fractions, nous avons opté pour un quotient exact (soit un nombre entier, soit une fraction au numérateur 1).

Allons plus loin :

| La MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS | OP. HABILLÉE | OP. ABSTRAITE |
|---|---|---|
| **Si** 500 g... 125 g | 500g : 125 g = | 500 : 125 = |
| **alors** 0,500 kg... 0,125 kg... | 0,500kg:0,125kg | 0,5 : 0,125 = |
| 0,375 kg... 0,250 kg | **...** | 0,375 : 0,25 = |
| | 0,625kg:0,875kg | … |
| | 0,125kg:0,0625kg | … |
| 187,5 g... 500 g | 0,1875 kg:0,500kg | … |
| (Vivent les sachets de 62,5 g de riz !) | | |
| 0,375 l... 1,5 l | … | |
| … | 0,50 l : 0,75 l | 0,5 : 0,75 = |
| … | … | 0,05 : 0,25 = |
| Imaginons : 5 cl de vin par rapport | … | 0,05 : 0,7 = |
| à la bouteille de 70 cl. | | |

Pour terminer : illustrons encore la richesse de la compensation qui exige toujours une belle photo panoramique : 0,40l :0,16l=0,05l :0,02l=5/2=2,5

- Des exemples à vivre avec des pièces de 50 centimes !

a) 0**,50** € comparés à 1,50 € en **valent** ? ...
Ça se voit:

Donc 0,50 € : 1,50 €= $\frac{1}{3}$ et 0,5 : 1,5 = 0,333....

(la « force » de l'opération habillée) (la faiblesse de l'opération abstraite.)
**1 € comparé à 1,50 € en vaut. ?**
Ça se voit tout aussi bien en opposant 2 pièces de 50 centimes à 3 pièces de 50 centimes.

Donc : 1 € : 1,50 € = 2/3... et 1 : 1,5 = 0,666...

Faisons la « chasse aux virgules » comme. ..jadis

a) 0,50€ : 1,50€= 5€ : 1 5 € = $\frac{1}{3}$ ou 1€ :3€= $\frac{1}{3}$

b) 1€ :1,5€=10€ :15€=2/3 ou 2€ :3€ = $\frac{2}{3}$

Les 2 exemples ci-avant pourraient servir de tremplin pour ces quelques exemples supplémentaires.

En français

1,500 kg par rapport à 0,375 kg (375 g) c'est la même chose que 0,500 kg (500 g) par rapport à 0,125 kg (125 g) et ils les valent 4 fois Opération habillée ou « photo panoramique »

1,500 kg : 0,375 kg = 0,500 kg : 0,125 kg = 4

Opération abstraite :

1,5 : 0,375 = 4

En français :

16,50 l comparés à 0,25 l c'est la même chose que
33 l comparés à 0,50 l et c'est encore la même chose que
66 l comparés à 1 l et ils le valent 66 fois

Opération habillée :

16,50 l : 0,25 l = 33 l : 0,50 l = 66 l : 1 l = 66

Opération abstraite :

16,5 : 0,25 = 66

(Tiens... « pour diviser par 0,25... », comme c'est bien loin, osons-nous espérer).

En français :

0,750 kg (750 g) comparés à 3 kg...

Opération habillée : au choix :

0,750 kg : 3 kg = 0,250 kg : 1 kg =1/4

= 1,5kg : 6kg = 3kg : 12kg = 1/4

Opération abstraite :

0,75 : 3 = 0,25

(Mais à quelle question répond un tel calcul ?)

Remarque :

La compensation parallèle s'avère parfois moins utile dans le cadre de la « Division-Comparaison » que dans le cas de la « Division-P./E » ;en effet, nous pouvons nous en passer grâce à notre maîtrise des « fameuses » fractions particulières :

1) 1,500 kg : 0,375 kg $= \frac{12}{8} : \frac{3}{8}$ kg = 4

2) 16,50 l : 0,25 l = $\frac{66}{4}$ l : $\frac{1}{4}$ l = 66

3) 0,750kg: 3 kg = $\frac{3}{4}$ Kg: $\frac{12}{4}$ Kg= $\frac{1}{4}$

Voilà que ces 3 derniers exercices constituent un bon tremplin pour nous plonger dans...

LA **COMPARAISON DES FRACTIONS**

Nombre entier ⟷ fraction :

« On ne compare que ce qui est comparable. » :

2 tartes comparées à une demi-tarte la valent ?... fois. Il suffit de les couper en deux (il faut le faire en classe) et il y aura 4 demi-tartes face à 1 demi-tarte

$$2\text{t} : \frac{1}{2}\text{t} = \frac{4}{2}t : \frac{1}{2} \quad t = 4 \qquad (2 : \frac{1}{2} = 4)$$

L’écriture de l’opération abstraite 2 :1/4 =8 est déconseillée afin de ne pas dévoiler prématurément les « règles algébriques ». Laissons-en le soin et le plaisir au premier cycle du secondaire.

**Si** 2 tartes comparées à 1 demi-tarte la valent 4 fois...
**alors** 1 demi-tarte comparée à 2 tartes en vaut le quart.

$\frac{1}{2}\boldsymbol{t}$ **:** 2 t = $\frac{1}{2}\mathbf{t} : \frac{4}{2}\mathbf{t} = \frac{1}{4}$ $\quad (\frac{1}{2} : \mathbf{2} = \frac{1}{4})$

3t $: \frac{3}{4}\mathbf{t} = \frac{12}{4}\mathbf{t} : \frac{3}{4}\mathbf{t} = \mathbf{4}$ $\quad (3 : \frac{3}{4} = \mathbf{4})$

Relisez :...

$\frac{3}{4}\mathbf{t} : \mathbf{3t} = \frac{3}{4}\mathbf{t} : \frac{12}{4}\mathbf{t} = \frac{1}{4}$ $\quad (\frac{3}{4} : \mathbf{3} = \frac{1}{4})$

Relisez :....

**Fraction : ⟷ Fraction : en 5 étapes**
dessin omniprésent !

1re étape :

Si 6 € comparés à 2€ les valent 3 fois...

6 € : 2 € = 3

alors 0,6 l : 0,2 l = 3

et alors $\frac{6}{7}$ t : $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ t = 3 et alors $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$ t : $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}$ t = $\frac{1}{3}$

Relisez :... etc.

Pour l'enseignant : les 2 dénominateurs sont les mêmes.

2e étape :

Comment fera-t-on pour comparer 1 cinquième de tarte à 1 dixième de tarte ?

$\frac{1}{5}\text{t} : \frac{1}{10}\text{t} = \frac{2}{10}\text{t} : \frac{1}{10}\text{t} = 2$ $\quad$ et $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ t : $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ t = ........

Relisez :...etc.

Pour l'enseignant : l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre.

3e étape :

$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}\mathbf{t} : \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\mathbf{t} =$ ………………………………… $= \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$

$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\mathbf{t} : \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}\mathbf{t} =$ ………………………………… $=$

4º étape : les préférés des élèves

Comment va-t-on comparer : des quarts à des sixièmes ?
des neuvièmes à des sixièmes ?
quinzièmes à des dixièmes ? huitièmes
à des douzièmes ?

Au travail !

$\frac{1}{6}t : \frac{1}{4}t = \frac{...}{12}t : \frac{...}{12}t =$ ?

$\frac{1}{4}t : \frac{1}{6}t =$ ............................. **?**

$\frac{5}{9}t : \frac{5}{6}t =$.................................. ?

etc

Revoilà le PPCM !

5º étape :

Comment faire pour comparer : des tiers à des demis ?
des tiers à des quarts ?
des sixièmes à des septièmes ? des
neuvièmes à des onzièmes ?etc.

Au travail ! Aiguisez vos couteaux.

1/3t :1/2t=2/6t :3/6t=2/3 et 2/5 :2/3= ? etc

En abrégé, en «algèbre » : $\frac{5}{7} : \frac{7}{8} = \frac{40}{49}$ Pas trop vite !

Et c'est au terme d'une longue série pareille que naîtra un jour la **conviction** que $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{ay}{bx}$

Observations intéressantes :

Les 5 étapes développées ci-dessus illustrent une fois de plus que dans le monde des fractions, chaque nouveau concept passe par ces trois « cas de figure » :

- La seule lecture suffit : 1er étape,
- Coupons peu mais coupons bien : 2e, 3e, 4e étapes,
- Il faut faire des miettes : 5e étape.

Et « faire des miettes » mène vers le monde de l'algèbre. Ces observations sont valables pour l'addition des fractions, la soustraction, la multiplication et la division.

Fraction : ⟶ Fraction : dans les coulisses de l'exploit

Continuons à défier l'intelligence des élèves. (Il est en effet peu probable de rencontrer les cas proposés dans des situations réelles)

4 1/5 t : 3/5 t = ... (21/5 t : 3/5 t = 7)
3/5 t : 4 1/5 t = ..... . ... ....

3/8 t : 4 1/8 t =................. = 1/11
2 2/5 : 7 1/5 t =................. = 1/3

Et encore :

3 1/6 t : 3 4/5 t =...5/6

Car

19/6 t : 19/5 t = 95/30 t : 114/30 t = 95/114 = 5/6 (PGCD = 19)

Vous souvenez-vous ?

$$3\frac{1}{6} : 3\,\frac{4}{5}\,\mathrm{t} = \frac{19}{6} : \frac{19}{5} = \frac{\cancel{19}^{\,1}}{6}\, x\, \frac{5}{\cancel{19}_{\,1}} = \frac{5}{6}$$

Oh, « joies » de la (re)production !

Comparer c'est la richesse, la clef de la mathématique :

2 3/5 t : 3 9/10 t = 26/10 t : 39/10 t = 2/3
c'est comme
2,6 l : 3,9 l (décimal)
et c'est comme
26 dl : 39 dl (entier)
et comme 0,19 €: 0,95 € et c'est facile !

## ET À PROPOS DU CALCUL ÉCRIT

Même dans le cadre d'une « division-comparaison »,
(24 540 l : 12 l = ?)
nous conseillons vivement de la vivre comme s'il s'agissait d'une « division-partage » (voir ce chapitre) afin de ne pas retomber dans un lan-

gage purement technique, dépourvu de sens pour les enfants :

12 en 24 ?... 2 fois
2 x 12 = 24
24 - 24 = 0
Je descends (! !) le 5 etc.

### LA « DIVISION-COMPARAISON » ET LE POURCENTAGE

Le quotient d'une division-comparaison exprime le rapport entre deux nombres. Ce quotient sera un nombre entier (3), une fraction (1/4 ; 0.37) ou un nombre décimal supérieur à l'unité (2,5).

Il suffira de transformer ces nombres en centièmes et nos quotients revêtiront la forme d'un pourcentage :

3 = 300/100 = 300 %
1/4 = 25/100 = 25 % ; 0,37 = 37 %
2,5 = 250/100 = 250 %

<u>Champs d'application (quelques exemples)</u>

Paul a 25 pts sur 40 à l'examen de grammaire.
25 pts comparés à ( :) 40 pts en valent (=) les 5/8 soit 0,625 soit 62,5 %

Luc a 23 pts sur 40 soit... les 23/40 ; le calcul écrit ou la calculette rendront leur verdict : 23 : 40 = 0,575 soit 57,5 %

15 personnes des 24 présentes à une assemblée ont voté « oui » à une proposition qui requiert 65 % des voix. Est-ce suffisant ?
15 personnes sur 24 personnes en valent les 5/8 ou
15 p : 24 p = 5/8 = 0,625 = 62,5 %. La proposition est rejetée.

Le calcul d'une pente (voir plus loin).

Les prix d'achat, bénéfice, prix de vente(voir plus loin).

Etc.

1) Savoir parler = savoir calculer ! Et il y a l'embarras du choix du vocabulaire !

2) La distributivité et la compensation parallèle s'imposent beaucoup moins que dans le cadre des divisions « partage » et « échange ».

3) Apprécions le fait que la « division-comparaison » habillée permet, grâce à son quotient exact, de mieux percevoir l'importance du rapport entre les deux quantités : 5 € : 15 €= 1/3 ⟶ 5 : 15 = 0,333...

## La « Division-Comparaison » et l'euro

### Phase 1: Histoires sans paroles

| | kg | x €/kg | = € |
|---|---|---|---|
| 1) | ? | 3,00 | 6,00 |
| 2) | ? | 6,00 | 3,00 |
| 3) | ? | 5,00 | 3,00 |
| 4) | ? | 5,00 | 7,00 |
| 5) | ? | 1,25 | 5,00 |
| 6) | ? | 0,50 | 0,75 |
| 7) | ? | 0,48 | 0,06 |
| g) | s | 1,50 | 7,50 |
| 9) | ? | 6,25 | 1,25 |
| 10 | ? | 0,40 | 0,15 |

### Phase 2 : Raconter/et/ou Rédiger)

Un conseil : il suffira de penser et de parler en termes de nombres **entiers** , comme suggérait un élevé de 11 ans .

3) 3 € par rapport à 5 € en valent les 3/5 donc 3/5 kg ou 600 g
4) 7 € par rapport à 5 € en valent les 7/5 donc 7/5 kg ou 1,400 kg
7) 6 centimes comparés à 48 centimes en valent ..
8) 750 centimes vis-à-vis de 150 centimes les valent...

### Phase 3 : L'opération habillée

5) 5 € : 1,25 € = 500cts : 125
6) 0,75 € : 0,50 € = 3 /2 ⟶ 1,500 kg

7) 0,06 : 0,48€ = 1/8 ⟶ 0,125 Kg

## Phase 4 l'opération abstraite

(l'opération « secrète »….ou « le snobisme intellectuel »)

3) 3 :5=0,6

10) 0,15 : 0,4 = ?

### Considérations finales à propos des divisions

#### Avantage... des divisions abstraites !?

En guise de transition entre le primaire et le secondaire, l'apprenant peut prendre conscience qu'une division abstraite lui laisse la liberté de la considérer et de la résoudre comme il le veut ; il pourra faire ses divisions « à la carte » :

36 : 0,75 = ?

soit c'est 36 F pour 75 cl ⟶ = 12 F : 0,25 = 48 F

soit c'est 36l comparés à 0,75l ⟶ 36 l : 0,75 l = =12l : 0,25l=48F

15 : 0,3 = ?

soit c'est 15 F pour 300 g ⟶ 15 F : 0,300 = 5 F : 0,100 = 50 F

soit c'est 15 l comparés à 3 dl ⟶ 15 l : 0,3 l= 150 dl : 3 dl = 50.

45 : 60 = ?

45 kg pour 60 caisses = 15 kg pour 20 caisses = 0,750 kg (par caisse).

45 € par rapport à 60 € en valent les 3/4...
grâce aux « toutes nouvelles pièces de 15 F !».

2 : 0,5 = ?

2 € pour 500 g de...

2 l par rapport au demi-litre...

# IV SYNTHÈSES

## UN SACRÉ TRIO

La multiplication et les divisions sont vraiment indissociables Là où l'une pointe le nez, les autres ne sont pas loin.

Première illustration : (inspirée par le travail d'élèves de 8 ans )
4 sachets de 5 bonbons (par sachet) font 20 bonbons.
4 x 5 b = 20 b.

20 b : 4 = 5 b
*20 bonbons pour 4 sachets*
*ça fait 5 bonbons (par sachet, pour 1 sachet).*

20 b : 5 b = 4
*20 bonbons comparés à 5 bonbons (sachet) les valent 4 fois,ainsi il y a 4 sachets.*

Deuxième illustration :
Réutilisons la balance digitale poids/ prix :

| | kg | x F/kg | = F | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2 | 50 | ? | On utilise la multiplc. |
| 2) | 0.120 | 35 | ? | |
| 3) | 1.150 | 120 | ? | 1 150 x 120 F |
| 4) | 3 | ? | 450 | On utilise la division-échange |
| 5) | 0.195 | ? | 78 | |
| 6) | 1.250 | ? | 200 | 200 F : 1.250 = |
| 7) | ? | 60 | 120 | On utilise la division-comparaison (division-rapport) |
| 8) | ? | 60 | 9 | |
| 9) | ? | 36 | 99 | 99 F : 36 F |

## « 1 » qu'on a perdu de vue

Remarque préalable :

Que de fois n'assiste-t-on pas à la confusion qui règne à propos de ces deux informations différentes « .. 5 kg pour 10 €... » face à

. 5 kg à 10 €...

Question fréquente des enfants : « C'est pour 1 kg ou pour 5 kg ? »

Nous trouvons dans le plan de référence du Programme Intégré la définition de l'opération : « Savoir calculer... combiner deux nombres en un troisième... »

Cette définition est vraie pour l'addition : 2 € + 3 €= 5 €.Elle reste vraie pour la soustraction : 5 € - 2 €= 3 €.
Elle n'est plus vraie pour la multiplication et les divisions !

Puisons des exemples dans les problèmes de la page précédente :
1)Combien *coûtent 2 kg de pommes à 50 F le kg ? (c'est-à-dire50 F pour1 kg)*
6) *200 F pour 1,250 kg de fraises, cela fait combien pour1 kg ?*
8) *Quelle est la masse du citron qu'on a payé 9 F sachant que1 kg coûte 60 F ?*

C'est manifestement le nombre « 1 » qu'on a perdu de vue. Parce que cela coule de source ? Parce qu'il est sous-entendu ? Mais les enfants l'ignorent parce qu'on n'y a jamais attiré (suffisamment) leur attention, certainement pas dans les colonnes de calcul mental ! Nous avons le devoir de le remettre en évidence. Nous avons le devoir de souligner sa présence, même et surtout dans les plus petites classes : Si 1 Kindle-surprise coûte 15 F, combien faut-il payer pour 4 Ks ?.

Un peu d'audace et d'uniformité

(pour adultes seulement et pour le plaisir)
Et si on réduisait ce « sacré trio » à une seule et unique expression verbale et à une seule et unique opération habillée dans lesquelles le

nombre « 1 » serait remis à l'honneur ! Illustrons nos propos au départ des situations de la page 181.

1) 50 F pour 1 kg ça fait <u>100 F</u> pour 2 kg (expression verbale)
   50F:1 = <u>100 F</u> : 2 (opération habillée)

3) 120 F pour 1 kg ça fait <u>138 F</u> pour 1,150 kg (120 F + 12 F + 6 F)
   120F :1=138F :1,150

4) 450 F pour 3 kg ça fait <u>150 F</u> pour 1 kg .

6) 200 F pour 1,250 kg ça fait <u>160 F</u> pour 1 kg

7) 60 F pour 1 kg ça fait 120 F pour 2<u>kg</u>

8) 60 F pour 1 kg ça fait 9 F pour <u>0.150 kg</u> ( $\frac{3}{20}$ d'un Kg)
   60 :1=9 :<u>0,150</u>

Ce serait une superbe illustration de plus de la compensation (cf. « Petit Robert » : Compensation : ... l'action de rendre égal).

## RE - INVESTIR

### INTRODUCTION

Nietzsche nous invitait, dans la première partie de cet ouvrage à « séduire les sens ». Nous avons essayé de séduire la vue, l'ouïe, le goût et le toucher en faveur de vérités abstraites à découvrir.

### CUEILLONS-EN LES FRUITS À PRÉSENT

<u>« Fenêtre sur.. »</u>
ou comment faire la lumière sur une flopée de formules encombrantes et dangereuses résolvant certains anciens problèmes-types.

Exemple : *Distance = temps x vitesse*

Question :

*Quelle est la distance parcourue en 10 minutes par un cycliste*

*qui roule à 24 km/h ?*

Vous avez déjà vu appliquer cette formule :

*Distance = 10x 24 km = 240 km !*

Oublions ces formules !

| N° | Epicerie | kg | x €/kg | = € |
|---|---|---|---|---|
| | Station d'essence | l | €/l | € |
| | Facture d'électricité | kWh | €/kWh | € |
| 1 | Temps, vitesse, distance *10 min* | h<br>1/6 d'heure | Km/h<br>24 | Km<br>? (4) |
| 2 | Superficie, densité population *Afrique* | $Km^2$<br>30 millions | hab./$km^2$<br>? (14) | ?hab.<br>420 millions |
| 3 | Volume, masse volumique, masse *Bois* | $dm^3$<br>? (0,750) | kg/$dm^3$<br>0,800 | Kg<br>0,600 |

Et nous pouvons également nous servir de cette présentation pour des calculs portant sur des surfaces (ou des aires)

| | | A = rangées | B = $cm^2$/rangée | C = $cm^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | 3 | 2 | ? |
| 5 | A Longueur (largeur) | 1,5 | 6 | ? |
| 6 | | 6 | ? | 24 |
| 7 | B Longueur (longueur) | 0,5 | ? | 10 |
| 8 | | ? | 3 | 18 |
| 9 | C Aire | ? | 10 | 15 |

N'en perdons pas pour autant la parole .

1) 1 sixième de 24 km ça fait 4 km (en 10 minutes).
2) 420 millions d'habitants pour 30 millions de km2 ça fait 14 hab. par $km^2$.
3) 600 g de bois comparés à 800 g de bois en valent les ¾ → 0,750 $dm^3$ (à montrer à l'aide du $dm^3$ débité)
4) 3 rangées de 2 $cm^2$ (3 fois 2 $cm^2$) ça fait 6$cm^2$

Remarque importante : Des expériences menées pendant 7 ans avec des enseignants ont montré l'étonnement ou le scepticisme de certains d'entre eux dans ce domaine où l'on est trop habitué à « mettre l'unité devant » (1 $dm^2$ x 3 x 4). Bonne lecture !

Ex : Face à un casier de 12 grandes bouteilles, personne ne s'offusque en entendant « 3 rangées de 4 bouteilles ! ! » (3 x 4 b). Où est la différence face à ce même casier vide dont chaque « compartiment » vaut environ 1 $dm^2$ et dont on peut dire qu'il y a « 3 rangées de 4 $dm^2$ (3 x 4 $dm^2$)

5) 1 fois 6 $cm^2$ plus la moitié de 6 cm2 ça fait 9 cm2 (à dessiner)

6) 10 $cm^2$ pour une demi-rangée ça fait 20 $cm^2$ pour 1 rangée (donc L = 20 cm) (à dessiner sur papier quadrillé).
7) 18 $cm^2$ par rapport à 3 $cm^2$ par rangée) les valent 6 fois, donc il y a 6 rangées (L = 6 cm).
8) 15 $cm^2$ comparés à 10 $cm^2$ (1 rangée) en valent les 3 moitiés, il y a donc 3 demi-rangées ou 1 rangée et demie (l = 1,5 cm) (à dessiner sur papier quadrillé).

« La Mathématique en Français » s'applique évidemment à tous les domaines.

- Problèmes en rapport avec la densité d'une population (Éveil).

*a) Suède :*

sup. : 450 000 $km^2$ densité : 20 h/$km^2$
population : 450 000 fois (x) 20 h = 9 000 000 h.

*b) Grande-Bretagne :*

Si pop. : 58 275 000 h et si densité : 185 h/$km^2$
alors sup. : 58 275 000 h comparés à 185 h les valent 315 000 fois donc 315 000 $km^2$
Opération : 58 275 000 h : 185 h = 315 000 (donc 135 000 $km^2$).

c) *Afrique* (n°2, p. 184)

Si sup.= 30 millions de $km^2$ et si pop.= 420 millions d'hab., alors la densité:
420 00 000 hab. : 30 000 000= 14 habitants.
Opération : 420 000 000 hab. : 30 000 000 = 14 hab.

Problèmes en rapport avec l'échelle d'une carte (Éveil).

a) Échelle : 1/250 000 ; dimension réduite : 3 cm

Dimension réelle : 3 cm pour 1/250 000 de la réalité ça fait 750 000 cm de distance Opération : 3 cm : 1/250 000 = 750 000 cm = 7,5 km

b) Si 5 cm représentent une route de 200 km,

alors voici l'échelle : 5 cm comparés à 200 km (ou à 20 000 000 cm) en valent 1/4 000 000

c) Une route de 50 km à l'échelle de 1/250 000 donnera une dimension réduite de 125mm parce que 1/250 000 x 50 km (50 000 000mm)

Calcul des pentes Remarques :

– Voir, à la TV, des reportages de courses cyclistes,... (Éveil)

– Le % est une fraction ; la fraction est (entre autres) un rapport, une comparaison entre 2 grandeurs de même nature ; ici en l'occurrence la comparaison d'une Verticale à une Horizontale (à dessiner à l'échelle).

a) Si la V. vaut (=) 9 m et si l'H vaut 24 m,

alors 9 m comparés à (ou vis-à-vis de, ou par rapport à) ( :) 24 m en valent (=) les 9/24 soit les 3/8 soit 37,5 %

Opération : 9 m : 24 m = 3/8= 37,5% 9 :24=0,375

b) Si V. = 24 m et si la pente = 40 % soit 2/5 de la H.,alors l'H. vaut 5/2 de la V. —> 5/2 x 24 m = 60 m

ou 24 m pour ( :)2/5 H. = 12 m :1/5 H. = 60 m (pour 1 H.)

c) Si H. = 240 m et si la pente = 20 % soit V. = 1/5 de H.,

alors V. = 1/5 de (x) 240 m soit (=) 48 m

Masse — Volume — masse volumique

Remarque sur la masse volumique :

Plus d'un titulaire de 6e année appréhende cette leçon. Il suffit de 2 pots de mayonnaise, de Ketchup, de sauce tartare, et de faire « parler » les étiquettes :

| | |
|---|---|
| *Mayonnaise :* | 500 ml — 470 g |
| | 250 ml —235 g |
| *Sauce tartare :* | 500 ml — 488 g |
| | 250 ml — 244 g |

*Ketchup :* 500 ml — 570 g
300 ml — 342 g

*Choux rouge :* 1 l — 1 kg

Assurément, les Grands Magasins sont des mines de matériel didactique.

Autres cas

a) Si V. = 0,750 $dm^3$ et si Mv. = 8 (c'est-à-dire 1 $dm^3$ pèse 8 kg ou8 kg pour 1 $dm^3$)
alors M. = 3/4 de (x) 8 kg soit (=) 6 kg.
b) Si Mv. = 8 et si M. = 160 g
alors 160 g comparés à 8 000 g n'en valent que 1/50 soit 1/50 d'un $dm^3$ soit 20 $cm^3$.
Opération : 160 g : 8 000 g = 1/50 ⟶ 20 $cm^3$. 0,125 :8=0,02
c) Si 2,5 $m^3$ de chêne pèsent 2 tonnes alors Mv. = ?
Mv. : 2 000 kg POUR (:) 2500 ($dm^3$) ça fait 20/25 ou 80 /100 ou 8/10
Ou 0,8d'unkg
Opération : 2 000 kg : 2 500 = 0,8 ⟶ 800 g/$dm^3$ 2000 :2500=0,8

- Temps — Vitesse — Distance

a) Si je roule pendant 40 min. (soit 2/3 h) à une V. de 30 km/h, alors ma distance parcourue sera de : 2/3 (x) 90 km soit (=) 60 km
b) Si j'ai parcouru 80 km en 48 min. (4/5h)

Solution : 80 km POUR ( :) 4/5 (h) c'est la même chose que (=)20 km pour 1/5 et c'est la même chose que (=) 100km/h

Opération : 80 km : 4/5 = 20 km : 1/5 = 100 km/h
c) **Si** V. = 40 km/h et si D. = 6 km
**alors** le T. en min. = ?
Solution : 6 km comparés à ( :) 40 km en valent (=) 6/40 ou3/20 d'1 h ou 9 min.
Opération : 6 km : 40 km = 6/40 ⟶ 6/40 d'1 h = 3/20 h =9/60 h =9min 6 :40=0,15

- Prix d'Achat — Prix de Vente — Bénéfice ( %)

sachant que le B. est un %, donc une fraction du PA.

a) **Si** PA = 80 € et si B = 62,5 % (= 5/8 du PA),
**alors** B = 5/8 DE (x) 80 € soit (=) 50 €
(⟶ et PV = 80 € + 50 € = 130 €).

b) **Si** PA = 75 € et si PV = 108 €.
**alors** B = ?

Opération : B. = 108 € - 75 = 33 €

c) **Si** PV = 100 € et si B = 25 %

**alors** PA= = ?

Opération : B = 25 % du PA = 1/4 du PA ;

PV = PA + 1/4 PA soit 5/4 du PA

PA ⟶ 100 € POUR (:) 5/4 (du PA) ça fait (=)20 € <u>pour</u> (:) 1/4 (PA) et ça fait (=) 80 € de PA

Opération : 100 € : 5/4 = 20 € : 1/4 = 80 € de PA

- <u>Géométrie</u> (sur géoplan et sur papier quadrillé !)

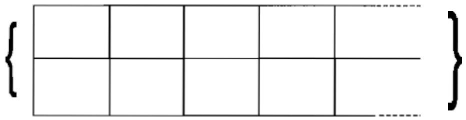
a) *Rectangle* de 3 cm sur 4 cm

L'Aire = 3 rangées de 4 cm2 ou 4 rangées de 3 cm2

3 x 4 cm2 ou 4 x 3 cm$^2$

b) Si A = 20 cm$^2$ et si l = 2 cm alors L= ?

2cm



20 cm$^2$

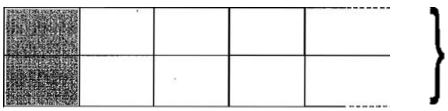
20 cm$^2$ <u>pour</u> 2 rangées ça fait 10 cm$^2$ par rangée donc 10 cm de L

Opération : 20 cm$^2$ : 2 cm$^2$ = 10 fois donc 10 cm

l'outil choisi est une division- partage

Ou

2 cm$^2$



20 cm $^2$

20 cm$^2$ comparés à 2 cm $^2$ *les valent 10 fois donc 10 cm de L*

L'outil choisi est une division-comparaison

c) *Parallélépipède rectangle* (à construire !)

H.=10cm L =5 cm l = 2 cm

FINISONS-EN une fois pour toutes ! 1cm3 x 10x5x2

Le Volume correspond à 10 couches (étages) de 5 rangées de 2 cm3

V = 10 x5 x2cm3

H x (L x l)

*d) Prisme hexagonal*

(V. = 1 890 $cm^3$ ; c. = 5 cm ; apothème=4,2cm H= ?

Après avoir cherché l'AB (... 63 $cm^2$) sur laquelle on peut disposer une couche de 63 $cm^3$ on peut conclure que :

H : 1890 $cm^3$ comparés à (une couche de) 63 $cm^3$ les valent 30 fois donc 30 cm

Opération : 1 890 $cm^3$ : 63 cm3 = 30 (fois) H=30 cm

e) *Recherche d'une Aire de Base* (AB) sachant V. et H.

V. = 2 $m^3$ et H. = 0,25 m soit 1/4 d'une couche

AB : 2 $m^3$ POUR (:) 1/4 d'une couche (0,25) ça fait 8 $m^3$ (pour 1couche entière) donc AB = 8 $m^2$

AB = 2 $m^3$ : 0,25 = 8 $m^3$ donc 8 $m^2$.

## DERNIÈRE PLAIDOIRIE

## EN FAVEUR DES OPÉRATIONS HABILLÉES ET DE LA MATHÉMATIQUE EN FRANÇAIS

CONSTATATIONS FRÉQUENTES ET NAVRANTES

Combien d'enseignants n'ont pas senti monter brusquement leur tension artérielle en corrigeant — tâche ingrate — des « problèmes d'arithmétique » ? Ils avaient pourtant bien insisté d'expliquer clairement, phrase par phrase, suivies chacune d'une opération habillée. (à laquelle l'enfant n'était habitué !)

Grande est leur colère alors en lisant : « Je fais 12 + 8 = 20 » alors que dans l'énoncé il s'agissait de 12 kg et de 8 € parmi d'autres informations.

Peu (ou pas du tout) habitués à des opérations habillées, beaucoup d'enfants choisissent deux nombres « qui vont bien ensemble ».

**COMMENT Y REMÉDIER**

Si nous dressons la Liste des différents petits problèmes possibles comptant 2 informations seulement, nous trouverons deux cas distincts.

- Premier cas :
  Les 2 informations sont deux déterminants numéraux cardinaux accompagnant 2 noms distincts. Ces 2 informations peuvent engendrer deux problèmes distincts. Ces 2 opérations différentes :
  Exemple : 5 kg et 20 €
  1) Combien coûtent 5 kg à 20 € le kg ?
  5 x 20 € ⟶ multiplication
  2) J'ai payé 20 € pour 5kg .Combien coûte 1 kg ?
  20 € : 5 ⟶ « division-échange »
- Deuxième cas :
  Les deux informations sont deux déterminants numéraux cardinaux accompagnant chacun un même nom. Ces 2 informations peuvent engendrer 4 problèmes différents... et donc 6 codes différents.
  Exemple : 5€ et 100 €
  1) Combien en tout ? ⟶ 100€ + 5 €... ou 5 € + 100 €
  2) Le reste 100€-5€
  3) La différence ? ⟶ 100€ - 5€ et 5€ - 100€=-95€
  4) Le rapport (comparaison) ? ⟶ 100 € : 5 €
  ou 5 € : 100 €

En dehors de ces 6 problèmes, 2 dans le premier cas et 4 dans le deuxième cas, il n'y a rien d'autre. Songeons-y avec les enfants et pour les enfants !

**TRAVAIL EN PARALLÈLE**

Songeons-y notamment pour travailler en parallèle, l'addition, la soustraction et la comparaison.

| | | |
|---|---|---|
| 20 € + 5 € = | 1/2 t + 1/4 t | 0,5 l + 0,25 l |
| *20 € - 5 € =* | *1/2 t - 1/4 t* | 0,5 l - 0,25 l |
| 20 € :5 € = | 1/2 t: 1/4t | 0,5 l : 0,25 l |

**BIZARRERIE DES OPÉRATIONS ABSTRAITES**

0,05 ? 0,2 = 0,25

Bien malin celui qui pourrait retrouver le signe effacé. IL y a en effet deux possibilités :

0,05 + 0,2 = 0,25 signifiant 0,05 l + 0,2 l = 0,25 l

0,05 : 0,2 = 0,25 signifiant 0,05 l : 0,2 l (5 cl : 20c) (voir la couverture du livre)

## ESSAYER,C'EST ÊTRE CONQUIS

Ces dernières pages s'adressent aux enseignants des élèves de 11 à 13 ans. Nous vous proposons de faire l'expérience suivante à la rentrée scolaire. Elle sera concluante, soyez-en sûrs ! « Que préférez-vous mes enfants : le calcul mental ou les problèmes ? » « Le calcul mental !!! » Ils vont changer d'avis.

Un premier test de 10 exercices de calcul mental. On n'écrit que le résultat.

| | |
|---|---|
| 1) 0,8 + 0,12 | 6) 0,6 : 0,12 |
| 2) 0,75 x 0,12 | 7) 0,08 : 0,4 |
| 3) 0,125 x 0,4 | 8) 7 : 21 |
| 4) 1,5 x 2/3 | 9) 6/13 : 2/13 |
| 5) 2/5 x 15/37 | 10) 0,5 : 4 |

Ensuite on corrige et on fait le bilan des prestations des élèves. On garde les feuilles.

Un deuxième test, immédiatement après. « Complétez les 10 phrases par les mots manquants »

1) 80 centimètres plus 12 centimètres cela fait... cm
2) les trois quarts de 12 centilitres ça fait... cl
3) un huitième de 40 centimètres cela fait... cm
4) une fois deux tiers de tarte plus la moitié de deux tiers de tarte cela fait en tout...
5) les 2 cinquièmes de 15 trente-septièmes cela fait...
6) 60 centilitres comparés à 12 centilitres les valent... fois
7) 8 centimètres comparés à 40 centimètres en valent...(quelle partie ?)
8) 7 élèves absents sur une classe de 21 en valent ...(quelle partie ?)
9) 6 treizièmes d'une tarte par rapport à 2 treizièmes de la même tarte les valent ?
10) 5 décilitres comparés à 4 litres en valent ... (quelle partie ?)

La comparaison des résultats est généralement stupéfiante !.

1•' test : 17 échecs dont plusieurs zéros ; 1 élève a 5 sur10

2 test :

Points : 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0

Nombre d'élèves : 3, 7, 2, 1, 1, 2, 1, 1

Ou encore :

1" test: 1 réussite sur 18 5% Réaction :

2$^{e}$ test : 14 réussites sur 18 77 % « MAIS C'EST DU FRANÇAIS !!! »

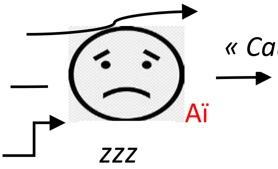
LE CHOIX DES ENFANTS EST FAIT DEPUIS DES LUSTRES.

E d i f i a n t

Car ils préfèrent apprendre avec plaisir !

Question d'un gamin au tableau noir : « Est-ce que je peux réfléchir, MONSIEUR ?
(Quelle tristesse)

Apprendre selon le « petit ROBERT »




bourrer,gaver,remâcher,rabâcher,gorger,ressasser,régurger,ruminer. ……une soixantaine selon Google ! (l'idée ancrée )


réfléchir,saisir,comprendre,acquérir,discerner ,attraper, embrasser,approprier,gagner,obtenir,méditer,découvrir dépister, dénicher,…….TROUVER « EURECA » .

OUI , les titres de cet ouvrage sont très très parlants !

-D'abord la découverte PAR les enfants de ces 2 petites prépositions : POUR ET DE ( à l'origine de ce travail)

-Vous avez combiné la conjugaison(valoir) avec l'usage des pronoms EN et (LE –LA-LES)

LAST BUT NOT LEAST (Août 2023) Mais ne grondons pas un enfant qui dirait :

20€ comparés à 5€ …C'est 4 fois plus !
5€ … 20€ C'est le quart !
15€ … 20€ …euh … les trois quarts !
FELICITONS – LE.

In fine, Moralité :

Pour mettre un calcul savant à nu, il faut d'abord le rhabiller.

EN AVANT …..MATH !

# NOTES

1. Peut-on suggérer au lecteur de jouer vraiment le jeu ? Pour vous familiariser pleinement avec *La Mathématique en français,* il vous est conseillé de faire toutes les activités proposées dans ce livre.
2. Marco Wolfs (professeur de mathématique), *La bosse des maths est-elle une maladie mentale ?,* Éd. La Découverte, 1984.
3. Plus tard il sera question d'un autre « cinéma » : un cinéma salvateur, la Gestion mentale.
4. Scène vécue dans une classe, et qui laisse rêveur : un élève est invité à venir au tableau écrire la réponse d'un calcul. Il s'adresse au professeur : « Est-ce que je peux réfléchir, Monsieur ? »
5. *Pour la pratique d'une pédagogie active, globale, fonctionnelle et interdisciplinaire, dans le cadre d'une école qui veut éduquer tout l'enfant,* FédÉFoC 1991.
6. Nicolas Rouche, *Pourquoi les maths,* UCL, 1988, p. 14-15.
7. *Pour la pratique d'une pédagogie active, globale, fonctionnelle et interdisciplinaire...,* op.cit., 1991.
8. Marco Wolfs, Op. cit.
9. G. lfrah, *Histoire universelle des chiffres,* Laffont, Coll. Bouquins, 1981-1994.
10. Ph. Jonnaert, *L'enfant géomètre,* Plantyn, 1996.
11. S. Baruk, *Fabrice ou l'école des mathématiques,* Éd. du Seuil,1994, p. 114.

12 G. Van Hout, *Et que le Nombre soit,* Éd. De Bœck-Université,1994, p. 21.

13 J. Masset, Inspecteur de l'enseignement secondaire.

14 G. Février in *lfrah,* op. cit. p. 394, t. 2

15 Programme Intégré « Plan de référence », p. 149.

16 Rappelons ici la mise en garde de G. Van Hout vis-à-vis du travail exagéré en base « Il serait tout aussi absurde d'initier l'enfant dans une base non décimale que dans une langue autre que la langue maternelle. ,in *Et que le Nombre soit,* op. cit.p.81.

17 À propos des dizaines:

Les deux « noms de dizaines » les plus parlants pour les enfants de 6 ans sont cinquante et septante .Les petits Suisses ont de la chance avec « huitante ». Les enfants inventent volontiers « huitante, troisante »

*Un Belge de 65 ans ayant eu un problème cérébral essaye de réciter les dizaines à sa logopède : •• dix, vingt,... septante, huitante.. Zut! L*

18 G. Van Hout, *Et que le Nombre soit,* op. cit.

*19* Pour rappel : les paroles de G. Van Hout, point 3, p. 16. CV

*20* G. Ifrach, *Histoire Universelle des chiffres,* op. cit.

*21* Joseph Stordeur *Bulletin d'information* n° 4 juillet-août 1997)

SEGEC – FédEFOC.

22 Joseph Stordeur, 1997, op. cit.

*23 Dans cette école huppée , le conférencier, parlant par la bouche d'un enfant :*

*« Si je ne sais pas 8x7,je triche et je fais 7x8 »*

*Les profs en chœur : ON NE PEUT PAS TRICHER DANS UNE ECOLE !!!*

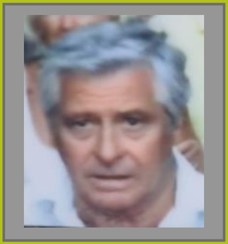
*Le conférencier s'est bien gardé de parler de Commutativité.*

La direction est allée se plaindre en haut lieu . (éclats de rires)

# TABLE DES MATIÈRES

## LA METHODE DE MAITRE AUGUSTE

Véritable passion de son auteur, la "Mathématique en Français " n'a cessé d'enthousiasmer et de convaincre enfants et professeurs depuis des lustres.



Ce livre propose de contribuer efficacement à l'école de la réussite. Il démystifie le nombre et les opérations en cheminant des couleurs de la vie au tableau noir.

En effet, la référence permanente à l'environnement permet de dédramatiser la mathématique aux yeux des enfants.

Ceci n'est pas un programme mais un guide méthodologique qui s'inspire du quotidien.

Il s'adresse surtout aux enseignants du fondamental et du premier cycle du secondaire mais aussi à tout curieux qui détestait le calcul. " C'est un livre extraordinaire qui se lit comme un roman " JO BR.

Ce livre est paru en 2000 d'où la présence du BEF. Cela ne change évidemment rien au message. Appelons-le Belgium-Ex-Franc.



2-8040-1408-8
D/2000/258/450

9 782804 014087